

SSCB'DE TOPOLOJİ (1917-1958)

Oğuz Şavk

Doktor Adayı, Matematik Bölümü
Fen Bilimleri Enstitüsü, Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul
oguz.savk@boun.edu.tr

ÖZET

Bu makalede, 1917-1958 yılları arasında Sovyet Sosyalist Cumhuriyetler Birliği'nde topoloji alanında ortaya konan bilgi birikiminin serüvenini kimi önemli sonuçları merkeze alarak ele alacağız. Bu tarihsel kesite ışık tutarken üç temel alan üzerine odaklanacağız: genel topoloji, cebirsel topoloji ve geometrik topoloji. Dönemin topoloji alanındaki en derin sonuçlarını güncel matematiksel bilgiye yansımalarıyla harmanlayarak sunacağız.

Anahtar Kelimeler: Matematik, Topoloji, SSCB, Alexandrov, Rokhlin, Pontryagin.

TOPOLOGY IN THE USSR (1917-1958)

ABSTRACT

In this article, we will survey on the adventure of the accumulation of knowledge in the field of topology in the Union of Soviet Socialist Republics between 1917-1958 by centering on several crucial results. While shedding light on this historical cross-section, we will focus on three main areas: general topology, algebraic topology, and geometric topology. We will present the deepest results of the period in the field of topology by blending them with their reflections on the current mathematical knowledge.

Keywords: Mathematics, Topology, USSR, Alexandrov, Rokhlin, Pontryagin.

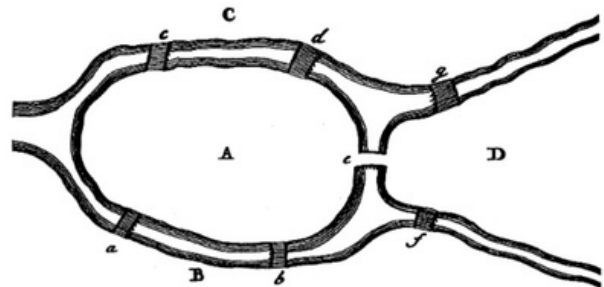
1. GİRİŞ

İnsanlığın çetin sınıf mücadeleleri sonucunda var ettiği ilk işçi devleti olan Sovyet Sosyalist Cumhuriyetler Birliği'nde, bilimin tüm alanlarının kolektif ve planlı iş bölümüyle örgütlenmesi sayesinde inanılmaz bir tarihsel ilerleme yaşandı. Tüm bilimsel yelpazenin içerisinde matematik bu sıçramadan en çok nasibini alan bilimlerden birisiydi. Matematikğin tamamını bir kenara bırakın sadece belirli bir alan merkeze alınsa bile, bir makale dizisinde mevcut üretimin tümünü ele almak imkansız bir uğraştır. Tam da bu sebeple, topoloji alanındaki önemi evrensel olarak da tescillenmiş kimi sonuçlara odaklanarak ilerleyeceğiz ve temel amacımız Sovyet topolojisini modern matematiksel bilgilerle harmanlayarak sunmak olacak.

Sovyet Sosyalist Cumhuriyetler Birliği'nde matematiği kavrayışa dair fikir vermek için döneme yön veren ünlü Sovyet matematikçi A.N. Kolmogorov'un, Büyük Sovyetler Ansiklopedisi'ne yazdığı matematik maddesine göz atalım. Burada Kolmogorov matematiği diyalektik materyalist perspektif ile Engels'i referans göstererek şöyle tanımlıyordu: "*Matematik, gerçek dünyanın niceliksel ilişkilerinin ve uzaysal şekillerinin bilimidir*" (Mathematics, GSE, 1970-1979). Kuşkusuz ki bu tanım modern matematiği anlamlandırmak için eksiktir ancak diyalektik materyalist yöntemin doğası gereği gelişime açıktır. Bu uğraş bambaşka bir yazının konusu olmaya aday olmakla birlikte, belirtmeliyiz ki, bu haliyle bile diğer idealist felsefi yaklaşımların aksine matematiğin yeryüzüyle ilişkisine dair kıymetli bir perspektif sunmaktadır ve geçerliliği ve gücü günbegün kanıtlanmaktadır. Bugünkü yazımızın konusunu

oluşturan topoloji alanına dönecek olursak, Yunanca kelime kökenin de anlaşılabilirliği üzere konum bilimi manasına gelir ve matematiksel uzayların sürekli deformasyonlar altında değişmemesini referans olarak matematiksel uzayları ilişkileriyle birlikte kavramaya, analiz etmeye ve sınıflandırmaya çalışır.

Matematik tarihi içerisinde topolojinin doğuşunu müjdeleyen ilk çalışma, matematikçiler arasında yaygın bir şekilde kabul de gördüğü üzere, Leonard Euler'e aittir (Euler, 1741). Dönemin Prusya'sında yer alan Königsberg'de, rivayete göre insanlar şehrin yedi yerine konuşlanan köprüleri, Pazar akşamüstü yürüyüşleri için kullanırmış. Königsberg'in yedi köprüsü problemine de şu soru kaynaklık ediyor: Şehri dolaşırken her bir köprüden bir kez geçecek şekilde bir rota bulunabilir mi?



Şekil 1. Euler'in özgün çizgileriyle problemin modellenışı.
Kaynak: Euler, 1741

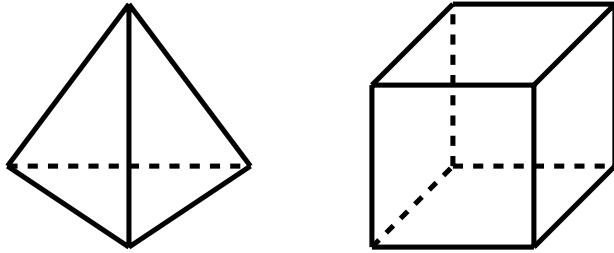
Böyle bir rotanın çizilemeyeceğini kanıtlayan Euler Königsbergliileri üzerken, matematiğin içinde artık geometriden farklılaşan bir alanın var olduğuna işaret ediyordu.

Çünkü problemin çözümünde ne adanın ne de diğer kara parçalarının yüz ölçümleri ile ilgilenilmez. Bunun yanı sıra köprülerin herhangi birinin uzunluğu veya herhangi iki köprü arasındaki mesafe önem arz etmez. Tüm bunların yerine tek belirleyici şey, kara parçalarının birbirlerine göre konumlanması ve kara parçalarının bütünü ilişkisi olmuştur. Yani problemin çözümünde niceliksel büyüklüklerden ziyade niteliksel özellikler belirleyici olmuştur (Şavk, 2019a).

Yine Euler topolojinin öncül makalelerinden bir diğerinde düzgün içbükey çokyüzlüler için önemli bir değişmez bulmuştur (Euler, 1758)¹. Çokyüzlünün köşe sayısını V , kenar sayısını E ve yüz sayısını F ile gösterirsek, Euler'in meşhur çokyüzlü formülü şu şekildedir:

$$V - E + F = 2.$$

Bu yaklaşım daha sonraları tüm topolojik uzaylara genişletilecek ve bugün topolojik uzayların en önemli değişmezlerinden biri olan homolojinin ve dolayısıyla Euler karakteristik değişmezi olarak bilinen niceliğin en büyük esin kaynağını oluşturacaktır. Euler'in argümanı bazı çokyüzlüler doğru olmayacak şekilde kurulduğu için kanıtında bir açık bulunmuş ve akabinde A.M. Legendre tarafından geçerli bir ispat verilmiştir (Şavk, 2019b, 2019c).



Şekil 2. Dört yüzlü $4 - 6 + 4 = 2$ ve küp (altı yüzlü) $8 - 12 + 6 = 2$.

Euler, Sovyet toprakları için çok önemli bir bilimsel figürdür çünkü ömrünün çok büyük bir bölümünü en derin bilimsel gelişmelerini ortaya koyduğu St. Petersburg Bilimler Akademisi'nde çalışarak geçirmiştir. Büyük matematikçilerden biri P.S. de Laplace'a göre Euler onsekizinci yüzyılın ikinci yarısının matematikçilerinin öğretmeni ve yol göstericisidir. Çalışmalarıyla Laplace'ın kendisi başta olmak üzere, Lagrange, G. Monge, A. M. Legendre ve Gauss ve daha sonra A. Cauchy, M.V. Ostrogradskii ve P.L. Chebyshev gibi matematikçilere ve dolayısıyla dünya matematiğine yön vermiştir (Euler, GSE, 1970-1979).

Bu noktadan itibaren, yazımızın tarihsel arka planını yerli yerine oturtmak ve batı kaynaklı makalelerin sınırlı ve Sovyet matematiğinin kayda değer bir kısmını yok saydığı bilgi akışının ve paylaşımının dışında kalmak için A.D. Aleksandrov'un SSCB'deki geometri ve topolojinin ilk otuz yılını en derin ayrıntısına kadar ele aldığı yazı dizisinin ilkini takip edeceğiz (Aleksandrov, 1947).

¹ Bu formülün Descartes tarafından daha önce ifade edildiği biliniyor. Ayrıntılar için (Şavk, 2019c) yazısına göz atılabilir.



Şekil 3. Euler'in 250. doğum gününe ithaf edilmiş Sovyet pulu.

Matematik literatüründe, *topoloji* terimi 1847'de Gauss'un öğrencisi Alman matematikçi J.B. Listing tarafından ortaya kondu; alana dair diğer bir isim, *analysis situs* idi, 1857'de Riemann tarafından cebirsel fonksiyonlar teorisi üzerine yaptığı çalışmada kendini gösterdi. Bu çalışmaları bugün Möbius şeridi olarak bildiğimiz tek taraflı ve kenarlı yüzeyi ortaya koyan Alman matematikçi A.F. Möbius takip etti.

Topolojinin kendi kavramları, yöntemleri ve problemleri ile bağımsız bir disiplin olarak varolması Fransız matematikçi Henri Poincaré'nin ondokuzuncu yüzyılın son yıllarındaki çalışmalarıyla mümkün oldu. Poincaré'nin araştırmasının merkezinde topolojik politoplar, yani n -boyutlu bir Öklid uzayının topolojik görüntüleri olarak alabileceğimiz, sonlu veya sayılabilir sayıda topolojik simplekse ayrıştırılabilen uzaylar yer alıyordu. Bu uzaylar çokyüzlülerin üçüncü boyuttan herhangi bir boyuta genellenmesidir. Bu simpleksleri birleştirerek elde edilen simpleksler kompleksi yapısının üzerine cebirsel ifadeler atayarak günümüzde homoloji olarak adlandırdığımız kavramı ortaya koydu.

Kuşkusuz ki topoloji alanının ondan tarihsel olarak da eski olan analiz alanıyla ilişkileri bulunmaktadır. Bu alanın temel çalışma nesneleri olan fonksiyon uzayları, ilk olarak 1904'te Fransız matematikçi M.R. Fréchet ve ardından 1914'te Alman matematikçi F. Hausdorff tarafından çalışıldı. Topolojik uzay kavramları fonksiyon uzaylarına soyutlandı ve bu sayede analitik nesnelerin sınır, bağlantı, vb. özellikleri ele alındı.

Genel topolojinin cebirsel topoloji ile birleştirilmesinin temelini ise Hollandalı matematikçi L.E.J. Brouwer'in 1910-1912 yılları arasındaki çalışmalarına borçluyuz. Sürekli eşlemelerin, hafif deformasyonlardan sonra parçalı eşleme ile yaklaştırılabilmesini sağlayan, *simpleksler yaklaşımı* kavramını ortaya koydu. Bu sayede Brouwer bir dizi temel teoremi kanıtladı. İlki boyut değişmezliği teoremidir: eğer bir politop topolojik olarak bir diğerine eşlenirse², o zaman her iki politop da aynı boyuta sahiptir. Bu sonuçlardan bir diğeri ise bölgenin değişmezliği teoremidir: eğer n -boyutlu Öklid uzayının bir açık kümesi

² Topolojik eşleme kavramının tanımını bir sonraki bölümde vereceğiz ve bu tip dönüşümleri *homeomorfizma* olarak adlandıracacağız.

U , yine n -boyutlu Öklid uzayında başka bir V kümesine topolojik olarak eşlenebilirse, o zaman V kümesi de açıktır. Son olarak ise meşhur sabit nokta teoreminden bahsedebiliriz: Öklid uzayı içerisindeki n -boyutlu diskten D^n kendisine yazılabilen her sürekli dönüşümün en az bir sabit noktası vardır.

Sovyet topolojisi sahneye çıkmadan hemen önceki en derin sonuçlardan birine ise Amerikalı matematikçi J.W. Alexander imza atmıştır. Bunlardan ilki 1915 yılına ait meşhur Alexander ikilik teoremidir: Bu sonuç sonrasında cebirsel topoloji kısmında bahsedeceğimiz gibi Sovyet topolojiciler tarafından geliştirilmiş ve genellenmiştir.

2. GENEL TOPOLOJİ

1920'li yılların başlarından itibaren Sovyet genel topolojisinin kurucuları ve topoloji alanının dünya çapında sürdürücüleri P.S. Aleksandrov, L.S. Pontryagin, A.N. Tikhonov ve P.S. Uryhson^[3] ve öğrencileri oldular. Bu bilim insanlarının öncülüğünde, günümüzde topolojik uzaylara dair bildiğimiz bir dizi temel kavram yerli yerine oturtuldu ve bir çok yeni sonuç elde edildi.

Sovyet topolojisinin bu güçlü sanheneye çıkışı, tarihte yapılacak ilk uluslararası konferansın, Birinci Uluslararası Topoloji Konferansı'nın, şaşırtıcı olmayacak şekilde, 1935'te Moskova'da düzenlenmesine gerekçe oluşturdu.

Üzerinde net bir konsensüs olmamakla birlikte konferansa 45 konuşmanın verildiği düşünülüyor. Bunlardan 13 tanesi Sovyet matematikçiler P.S. Aleksandrov, N.N. Bogolyubov, N.M. Krylov, N.K. Brushlinskii, V.A. Efremovich, I.I. Gordon, A.N. Kolmogorov, A.A. Markov, V.V. Nemytskii, L.S. Pontryagin, J.A. Rózaáska, A.N. Tikhonov; 10 tanesi Amerikalı matematikçiler J.W. Alexander, G. Birkhoff, E.R. van Kampen, S. Lefschetz, J. von Neumann, P.A. Smith, M.H. Stone, A.W. Tucker, H. Whitney; 7 tanesi Polonyalı matematikçiler K. Borsuk, K. Kuratowski, S. Mazurkiewicz, J. Schauder, W. Sierpiński; 4 tanesi İsviçreli matematikçiler H. Hopf, G. de Rham; 3 tanesi Hollandalı matematikçiler D. van Dantzig, H. Freudenthal, W. Hurewicz; 2 tanesi Fransız matematikçi A. Weil; 2 tanesi Çekoslovakyalı matematikçi E. Čech, 2 tanesi Danimarkalı matematikçi J. Nielsen; 1 tanesi Alman matematikçi G. Nöbeling ve 1 tanesi Norveçli matematikçi P. Heegaard tarafından veriliyor (Lapko-Luster-nik, 1957)^[4].

Bugün lisans müfredatlarının içeriğine kadar indirilmiş, topoloji ve topolojiyle yakinen ilgili derslerin içerikleri neredeyse tamamen bu matematikçilerin sonuçlarıyla bina ediliyor. Bu sebeple makalede Sovyet topolojicilerinin ge-

nel topolojideki tüm sonuçları vermekten kaçınıp^[5], onun yerine en önemlilerinden biri olarak bulduğum tek bir kavrama odaklanacağız: Aleksandrov'un tek-nokta kompaktlaştırması. Bunoktadan itibaren bu kavramının önemini ve derinliğini açıklamaya gayret ederek, en temel geometrik ve topolojik uzayların bir diğerinden bu yöntemle nasıl elde edildiğini sunmaya çalışacağız.



Şekil 4. Birinci Uluslararası Topoloji Konferansı, Moskova, 1935.
Kaynak: Whitney, 1992.

İlk olarak, topolojik uzayı sezgisel olarak kavramakla başlayalım. Geometrik uzayların aksine, topolojik uzaylarda noktalar arasındaki mesafeler sayısal bir büyüklük ifade edilip ölçülmesine de kontrol edilir, yani bir noktanın etrafındaki komşuluğa ve noktaları içeren komşuluklar arasındaki ilişkilere odaklanılır. Bu manada topolojik uzaylar, geometrik uzayların matematiksel olarak bir soyutlamasıdır.

Daha formal bir şekilde ifadece olursak, topolojik uzaylar en yaygın biçimde açık kümeler vasıtasıyla tanımlanırlar. Şimdi X bir küme ve τ , X 'in alt kümelerini içerecek bir koleksiyon olsun. Aşağıdaki üç şartı sağlayan (X, τ) ikilisine *topolojik uzay* diyoruz:

(1) Boş küme $\emptyset$ ve X , τ 'da yer alır.

(2) τ 'nın içindeki kümelerin herhangi bir birleşimi yine τ 'nın içindedir.

(3) τ 'nın içindeki kümelerin sonlu sayıdaki kesişimi yine τ 'nın içindedir.

(X, τ) topolojik uzayının bir *tabanı* $\beta \subset \tau$ bir alt koleksiyondur öyle ki τ 'nın herhangi bir elemanı β 'nın elemanlarının birleşimi olarak temsil edilebilir. τ 'nın içinde yer alan her kümeye *açık küme*, tümleyen τ 'da açık küme olan kümelere ise *kapalı küme* diyoruz. Kompaktlık kavramı da topolojik uzayları kendisi sonsuz olsa bile sonlu adet parçasına bakarak kavrayabilir miyiz fikrinden meydana geliyor. Birleşimleri tüm X kümesini veren açık kümelerin koleksiyonuna *örtü* diyoruz. Örtüler pekala sonlu ya da

3 Not düşmek gerekir ki Uryson 1924'te, henüz 26 yaşındayken, Britanya'da yüzerken hayatını kaybetmiştir.

4 Çoğu zaman böylesine uzun isim listelerinin makale içinde yer alması okuyucuyu dağıtacağını düşünüyorum. Ancak bu istisna özellikle matematik tarihine ve topolojiye meraklı bir okuyucuyu yazıya daha fazla odaklayacağı inancıyla yapıldı.

5 Neredeyse tüm genel topoloji alanını sıfırdan anlatmaya denk düşeceği için olanaksız bir uğraştır.

sonsuz tane kümenin birleşiminden oluşabilir. O yüzden eğer X 'in her örtüsüne karşılık gelen sonlu bir alt örtü bulabiliyorsak X 'e *kompakt* diyoruz. Örneğin, bu yaygın tanımı yine Sovyet matematikçiler Aleksandrov ve Uryshon'a borçluyuz⁶ (Aleksandrov-Uryshon, 1929).

Şimdi Aleksandrov'un 1924'te ortaya koyduğu tek-nokta kompaktlaştırması kavramına geri dönelim (Aleksandrov, 1924). Adından da tahmin edilebileceği üzere bu kavram sayesinde kompakt olmayan bir uzaya sadece bir nokta ekleyerek kompakt bir uzay elde ediyoruz. Biraz daha açacak olursak, uzayın her bir noktasını içeren ve topolojik uzayın içinde yer alan bir açık kümeden bahsedebiliriz. Aleksandrov sayesinde başladığımız uzayda keyfi olarak aldığımız, açık kümelerden oluşan ve uzayı kaplayan herhangi bir örtünün sonsuz alt örtüsünü bulamazken, ona sadece sonsuzda bir nokta ekleyerek artık bunu mümkün kılmış olduk. Bu kavram, karşıtların birliği ilkesinin kendini berrak bir şekilde gösterdiği, sonlu-sonsuz diyalektiğine içkindir. Dolayısıyla Aleksandrov'un yöntemi, sonsuzda nokta ekleyerek veya başka bir deyişle sonludan sonsuza kaçışı önleyerek uzaydaki diğer noktaların sonsuzluğa gidişini kontrol etmeyi mümkün kılar.

Bir topolojiyi tarif etmek için onun açık kümelerini tarif etmemizin yeterli olduğunu söylemiştik. Şayet (Y, τ_Y) topolojik uzayı aşağıdaki iki şartı sağlıyorsa, (X, τ_X) topolojik uzayının *Aleksandrov tek-nokta kompaktlaştırması* olarak adlandırılır:

$$(1) Y = X \cup \{\infty\},$$

$$(2) \tau_Y = \{U \mid U \in \tau_X\} \cup \{Y \setminus F \mid F, X \text{ de kapalı}\}.$$

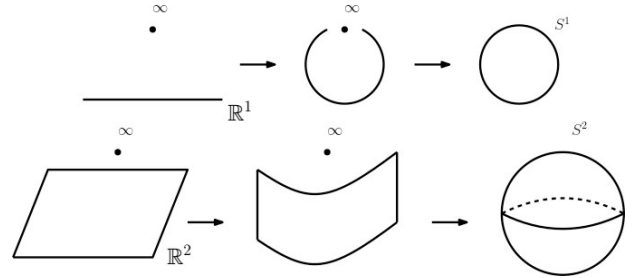
Şimdi Öklid uzayıyla kürelerin arasındaki sıkı topolojik ilişkiyi Aleksandrov tek-nokta kompaktlaştırması vasıtasıyla ele alacağız. Bir n -boyutlu küre S^n , orijinden birim uzaklıkta bulunan $(n+1)$ boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^{n+1}$ 'deki noktalar kümesi olan topolojik bir uzaydır:

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\}.$$

Bu tanım vasıtasıyla geometrinin temel nesneleri olan birim çemberi S^1 ve birim küreyi S^2 olan herhangi bir boyuta genellemiş olduk. Heine-Borel Teoremi Öklid uzayındaki kompakt kümeleri tamamen karakterize eder: bir kümenin kompakt olması için gerek ve yeter koşul onun kapalı ve sınırlı olmasıdır. S^n kapalıdır çünkü S^n 'nin dışında aldığımız bir noktanın koordinatlarını yeterince küçük bir biçimde oynatırsak yine S^n 'nin dışında kalırız ki, bu da S^n 'nin dışının açık, kendisinin kapalı olduğunu gösterir. Sınırlı olduğu ise tanımı gereği açıktır; dolayısıyla S^n kompakt bir topolojik uzaydır. Ancak Öklid uzayını sınırlayamadığımız için kompakt olmadığını gözlemleyebiliriz. Şimdi ana argümanımızı ifade edip sonra da onu açıklayama çalışalım:

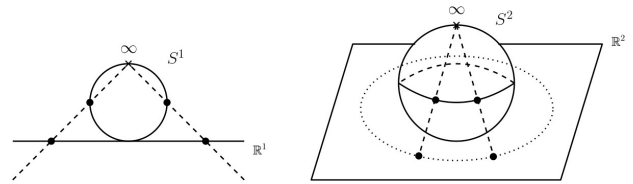
Teorem 2.1. *Herhangi bir boyuttaki birim küre aynı boyuttaki Öklid uzayının bir Aleksandrov tek-nokta kompaktlaştırmasıdır yani $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$.*

Şimdi bu teoremin neden doğru olduğunu sezgilerimize de yaslanarak, geometrik bir argümanla ele alalım. Aşağı şekilde de görüldüğü gibi 1-boyutlu Öklid uzayını $\mathbb{R}^1$ topolojik olarak bir doğru parçası gibi düşünebiliriz çünkü uzatmak veya kısaltmak bir uzaydan diğerine bir homeomorfizma verir yani topolojisini korur. Şimdi bu doğru parçasını sonsuzdaki noktaya doğru ovalleştiririz, hala $\mathbb{R}^1$ 'in homeomorfizma tipini koruyoruz. Son olarak sonsuzdaki noktayla iki ucunu birleştirerek birim çemberi S^1 elde ederiz. Bu argümanı yine şekilde görüldüğü üzere iki boyutta da tekrarlayabiliriz.



Şekil 5. Aleksandrov tek-nokta kompaktlaştırması örnekleri

Kompaktlaştırma olgusu karşıtı olan dekompaktlaştırma olgusuyla birlikte varolur. Yani kompakt nesneden bir nokta çıkararak kompakt olmayan nesneyi geri edebiliriz. Bizim örneğimizde, bu olgu matematiksel olarak stereografik izdüşüm olarak bilinen, gündelik hayatta ise haritalamaya karşılık düşen yöntemle karşılık gelir. Şayet nesnemizden sonsuzdaki noktaya karşılık gelen kuzey kutup noktasını genelliği bozmadan çıkarıp, o noktayı küre ve Öklid uzayından geçecek şekilde doğrularla izdüşürsek süreci tamamlamış oluruz.



Şekil 6. Bir dekompaktlaştırma süreci olarak stereografik izdüşüm.

Tarif ettiğimiz kavram setiyle birlikte teoreminizi matematiksel olarak açıklayalım ve ilk olarak $\mathbb{R}^1$ üzerindeki doğal topolojiden bahsetmekle başlayalım. Bunu yapmak için onun doğal tabanından bahsetmek yeterli olacaktır. Tahmin edilebileceği üzere bu taban gerçel sayılar üzerindeki açık aralıklarla verilebilir. Genel olarak n -boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$ 'i aşağıdaki gibi düşünebiliriz:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n\text{-kez}} = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Beklendiği üzere $\mathbb{R}^n$ 'e karşılık gelen topolojiyi $\mathbb{R}$ üzerindeki topoloji vasıtasıyla elde ederiz: $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Tikhonov çarpım topolojisinin açık kümeleri, açık kümelerin çarpımı ve bu çarpımların olası birleşimleridir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ 'e kar-

⁶ Kompakt kavramının analizden başlayarak topolojiye uzanan tarihsel seyrini için Raman Sundström (2015) makalesine başvurulabilir.

şılık gelecek doğal taban, $r \in \mathbb{R}^n$ ve $\epsilon > 0$ olmak üzere, $\beta_{r,\epsilon} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : || \mathbf{x} - r || < \epsilon \}$ 'dur. Şimdi $\mathbb{R}^n$ 'in Aleksandrov tek-nokta kompaktlaştırmasına gelen $\mathbb{R}^n$ topolojik uzayının bazını tarif edelim. Bunu da hali hazırda olan doğal taban $\beta_{r,\epsilon}$ 'u kullanarak ve sonsuzdaki noktanın açık komşuluğunu yazarak yaparız: $R \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\beta_{\infty,R} = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : || \mathbf{x} || > R \}$. Özetle, $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ 'nin bazı $\beta_{r,\epsilon} \cup \beta_{\infty,R}$ 'dır. Gösterilebilir ki bu uzay S^n 'ye homeomorfiktir.

Aleksandrov'un tek-nokta kompaktlaştırması, Tikhonov'un da çalışmalarının üzerine bina edilerek Stone-Čech kompaktlaştırmasıyla genellenmiştir. Hemen akla ilk gelebilecek başka bir yöntem de doğrudur: bir topolojik uzaya birden fazla nokta ekleyerek de onu kompaktlaştırabiliriz. Örneğin, gerçel ve karmaşık projektif uzaylar $\mathbb{RP}^n$ ve $\mathbb{CP}^n$, sırasıyla $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$ 'nin bu manada kompaktlaştırmasıyla elde edilebilir.

3. CEBİRSEL TOPOLOJİ

Manifold tekil noktaları olmayan^m bir eğri veya yüzey kavramının herhangi bir boyuta sadeleştirilerek genelleşmesiyle oluşan matematiksel nesnedir. Sadeleştirmekten kastımız tekilliklerden kurtulan geometrik nesnenin her noktasının civarının yerel olarak Öklid uzayına benzemesidir: Bu civara bir büyüteç ile yaklaştığımızı düşünelim. O noktanın etrafını çevreleyen bir komşuluğa baktığımızda Öklid uzayının bir kopyasını görmek istiyoruz; yani üzerinde geometri ve analiz yapmayı hali hazırda bildiğimiz en basit uzayı talep ediyoruz. Benzemeyi matematiksel olarak kavramlaştıracak olursak, her komşuluk ile Öklid uzayı arasında *homeomorfizma* adınıverdiğimiz kendisi ve tersi birebir, örten ve sürekli bir fonksiyon yazıyoruz. Ancak genelleştirirken de manifoldun bütününde herhangi bir karmaşıklığa izin verişimiz yapımıza zenginlik katıyor: Bu serbestlik bize Öklid uzayından başlayan geniş bir uzay yelpazesi sunuyor. Bir manifoldun boyutuna ise yerel olarak karşımıza çıkan Öklid uzayının boyutuna bakarak karar veriyoruz. Dolayısıyla yerel olarak $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayına benzeyen bir M topolojik uzayı n -boyutlu manifoldtur, kısaca M 'ye n -manifold diyelim.

Bu parça-bütünlük diyalektiğine dair hassas ve derinlikli soyutlama, geometrinin birçok temel nesnesine yeni ve farklı bir perspektiften bakmamıza olanak sağlıyor. Manifold kelimesinin etimolojik kökeni bu soyutlamanın felsefesine dair derin izler taşıyor. Üstelik dönemin matematiksel bilgi birikiminde meydana gelen sıçramayı gözlemlememize de olanak sağlıyor. Sanılanın aksine manifold sözcüğü İngilizce many ve fold kelimelerinin birleşiminden değil, Türkçeye aynı zamanda çeşitlilik/varyete olarak da çevirebileceğimiz *Mannigfaltigkeit* isimli Almanca sözcükten türetilmiştir ve ilk olarak Bernhard Riemann tarafından kullanılmıştır (Riemann, 1851)⁹. Bu tarihsel ana

7 Örneğin, bir noktada kendini kesmesine veya bir sivri çıkıntıya sahip olmasına izin vermiyoruz.

8 *Mannigfaltigkeit* kavramına daha öncesinde Immanuel Kant'ın *Saf Akılın Eleştirisi* adlı eserinde rastlamak mümkün. Ancak Riemann'ın Kant'tan esinlenerek bu kelimeyi türettiğine dair somut bir veri bulunmuyor (Boi, 2019).

kadar matematikçiler için biricik geometri, Öklid'in düz geometrisi olagelmıştır. On dokuzuncu yüzyılın ikinci çeyreğinden itibaren J. Bolyai, N.I. Lobachevski, C.F. Gauss ve B. Riemann gibi matematikçilerin çalışmalarıyla inşa edilen Öklid dışı geometriler, Öklid geometrisinin biricikliğini nihai bir biçimde ortadan kaldırmıştır. Bu sarsıcı geçiş maddi dünyayı materyalist bir biçimde kavramanın bir ürünüdür ve bu kırılma, sarsıntılı geçiş fizik bilimindeki Newton fiziğinden Einstein fiziğine geçiş ile kıyaslanabilir. Arap matematiğindeki çürütme girişimlerini bir kenara koyacak olursak, iki bin yıldan fazla bir süre kimse Öklid geometrisinin doğruluğundan şüphe etmedi, sarsılmaz otoritesini sorgulamadı veya ona bir alternatif bulmayı düşünmedi. Ünlü matematik tarihçisi Kline (1990)'ın bu alt üst oluş hakkındaki cümlesini anımsatalım: "Öklid dışı geometrinin yaratılması, Yunan zamanlarından beri matematikte en önemli ve devrimci adımdı."

Manifoldlar Poincaré'nin çalışmalarından itibaren topolojinin ve genel olarak matematiğin içerisinde ciddi bir yer tutmuşlardır. Yazımızın bundan sonraki bölümü, Poincaré ikiliğinden başlayarak manifoldlara karşılık gelen cebirsel nesneler olan homoloji ve kohomoloji grupları değişmezlerinin arasındaki sıkı ilişkiyi açıklamaya çalışan, ikilik teoremlerine odaklanacak. Sırasıyla, Poincaré, Alexander, Pontryagin ve Sitnikov ikilik teoremlerini sunacağız ve Pontryagin İkiliği'nin kökenini ele alacağız.

Teorem 3.1 (Poincaré İkiliği, Poincaré, 1893). *G bir abel grup, M kapalı, yönlendirilmiş bir n -manifold olsun. O zaman M 'nin k dereceden homoloji grubuyla $(n-k)$ dereceden kohomoloji grubu birbirine izomorfiktir. Yani $H_k(M; G) \cong H^{n-k}(M; G)$.*

Yukarıdaki teoremin ifadesi Poincaré'nin tarafından, Betti grupları üzerinden daha cebirsel bir şekilde ifade edilmiştir. 1930'lu yıllarda, topolojik uzayların kohomoloji teorisi Aleksandrov, Kolmogorov ve Čech tarafından ortaya konmasıyla birlikte Čech ve Whitney bu yapının üzerinde, bir gruptan fazla olarak bir halka yapısı kurulabileceğini fark etmişlerdir. Kohomoloji halkası üzerinde kap ve keş çarpım ortaya konduktan sonra Poincaré İkiliği, yukarıdaki modern formülasyonuna kavuşmuştur.

Manifoldlar üzerinde bu netlikteki bir sonuçtan itibaren ikilik teoremleri, en genel olarak herhangi bir topolojik uzayda, içinde yer alan bir alt kümenin karakterizasyonu ile birlikte çalışılmıştır. Bu sayede topolojik uzaylara karşılık gelen cebirsel değişmezler göreceli olarak incelenmiştir.

Bir sonraki ikiliğe geçmeden önce topolojik uzaylar için epey önemli bir yer tutan *büzülme* olgusuna göz atalım. Sezgisel olarak bir noktaya sürekli bir biçimde büzebildiğimiz topolojik uzaylara *büzülebilir uzay* diyoruz. Matematiksel bir şekilde ifade edecek olursak topolojik uzayımızın birim dönüşümünün bir sabit dönüşüme homotopik olmasıdır yani sıfır anında birim dönüşüm, bir anında sabit bir dönüşüme karşılık gelecek, uzayın kendisinin birim

aralıkla kartezyeninden kendisine sürekli birdönüşüm bulmamız gerekir. Şayet uzayımızın her noktasındaki komşuluk böyle davranıyorsa *yerel büzülebilir uzay* diyoruz⁹. Şimdi Alexander ikiliğini ifade edebiliriz.

Teorem 3.2 (Alexander İkiliği, Alexander, 1915). *G bir abel grup ve A, S'nin kompakt, yerel büzülebilir bir alt uzayı olsun. O zaman A'nın S'deki tümleyeninin indirgenmiş k dereceden homoloji grubuyla kendisinin (n-k-1) dereceden kohomoloji grubu birbirine izomorfiktir. Yani indirgenmiş k dereceden homoloji grubuyla kendisinin (n-k-1) dereceden kohomoloji grubu birbirine izomorfiktir. Yani $H_k(S^n \setminus A; G) \cong H^{n-k-1}(A; G)$.*

Klasik homoloji teorisinde ortaya çıkacak patolojileri, topolojik uzayımızı simpleksler kompleksi haline getirirken, örtülerin arasındaki kesişimleri hassas bir şekilde kontrol ederek ve rafine ederek, ortadan kaldırabiliriz. Bu şekilde ortaya konan cebirsel teorilere *Aleksandrov-Čech homoloji ve kohomoloji* diyoruz. Örneğin; bu teorige Alexander ikiliğini ifade ederken yerel büzülebilirlik şartına ihtiyaç yoktur (Hatcher, 2002). Yine Aleksandrov-Čech homoloji terminolojisini kullanarak, Aleksandrov tarafından formülize edilen Pontryagin ikiliğinin manifoldlar için karşılığını vereceğiz (Sklyarenko, 2011). Aşağıdaki ifade kimi kaynaklarda Aleksandrov-Pontryagin İkiliği olarak da bilinmektedir.

Teorem 3.3 (Pontryagin İkiliği, Pontryagin, 1955). *G bir abel grup, M kompakt, bağlantılı, yönlendirilmiş bir n-manifold ve A, M'nin kompakt bir alt uzayı olsun. Eğer M'nin k dereceden ve (k+1) dereceden Aleksandrov-Čech kohomoloji grubu tek elemanlı grup ise o zaman A'nın M'deki tümleyeninin indirgenmiş k dereceden homoloji grubuyla kendisinin (n-k-1) dereceden kohomoloji grubu birbirine izomorfiktir. Yani $\tilde{H}_k(M \setminus A; G) \cong \tilde{H}^{n-k-1}(A; G)$.*

Aleksandrov'un başka bir öğrencisi olan K.A. Sitnikov yukarıdaki ikilik teoreminin ifadesindeki A'nın üzerindeki kompaktlık koşulunu ortadan kaldırarak, herhangi bir alt uzay seçebileceğimizi kanıtlamıştır:

Teorem 3.4 (Sitnikov İkiliği, Sitnikov, 1951). *G bir abel grup, M kompakt, bağlantılı, yönlendirilmiş bir n-manifold ve A, M'nin bir alt uzayı olsun. Eğer M'nin k dereceden ve (k+1) dereceden Aleksandrov-Čech kohomoloji grubu tek elemanlı grup ise o zaman A'nın M'deki tümleyeninin indirgenmiş k dereceden homoloji grubuyla kendisinin (n-k-1) dereceden kohomoloji grubu birbirine izomorfiktir. Yani $\tilde{H}_k(M \setminus A; G) \cong \tilde{H}^{n-k-1}(A; G)$.*

Şimdi Pontryagin İkiliği'nin, kompakt yerel topolojik gruplar ve onların karakterleri cinsinden ifade edilen orjinal versiyonu ele alacağız ve analize uygulamalarından bahse-

deceğiz. Temel tanımlar ve teorem için, topolojik gruplar üzerine yazılan, Pontryagin'in dört ciltlik seçme çalışmalarından ikincisini takip edeceğiz (Pontryagin, 1986).

Üzerindeki topolojik uzay ve grup yapısı birbiriyle uyumlu olan nesnelere *topolojik grup* diyoruz. Matematiksel olarak ifade edecek olursak, bir topolojiye sahip G grubu için, şayet $\alpha : G \times G \rightarrow G$, $\alpha(g, h) = g + h$ ve $\beta : G \rightarrow G$, $\beta(g) = g^{-1}$ dönüşümleri sürekliyse G bir topolojik gruptur. G topolojik grubunun her noktası kompakt birkomşuluk tarafından içeriliyorsa ve üzerindeki grup işlemi değişmeliyse G'ye *yerel kompakt değişmeli (YKD) topolojik grup* diyoruz.

Çember üzerinde doğal bir grup yapısından bahsetmek mümkündür çünkü normları bir olan karmaşık sayılar çarpma işlemiyle birlikte bir grup oluşturur. Kümesel olarak ifade edecek olursak, $\mathbb{T} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ ile verilen gruba *çember grup* denir. Şimdi bir YKD topolojik grup G verildiğinde, onun *karakteri* χ , grubun kendisinden çember grubuna bir sürekli grup homomorfizmasıdır yani her $g, h \in G$ için $\chi(gh) = \chi(g)\chi(h)$ 'dir. G'nin üzerindeki tüm karakterlerin noktasal çarpma işlemiyle, yani $(\chi, \eta)(x) = \chi(x)\eta(x)$ ile bir YKD topolojik grup haline getirebiliriz. Bu yapıya G'nin *ikilisi* denir ve $\hat{G}$ ile gösterilir. Benzer bir şekilde $\hat{G}$ 'nin ikilisini de tanımlayabiliriz, bunu da $\hat{\hat{G}}$ ile gösterebiliriz. Bu da bize bir YKD topolojik gruptan, onun ikilisinin ikilisi olan YKD topolojik gruba bir dönüşüm yazmamıza olanak sağlar:

Verilen bir $g \in G$ için, Pontryagin dönüşümünü $\omega : G \rightarrow \hat{\hat{G}}$, $\omega_g(\chi) = \chi(g)$ kuralıyla tanımlayalım. Aşağıdaki gözlemimiz ω 'nın aynı zamanda bir grup homomorfizması olduğunu söyler: her $\chi, \eta \in \hat{G}$ için, grup işlemi korunur.

$$\omega_g(\chi\eta) = (\chi \circ \eta)(g) = \chi(g)\eta(g) = \omega_g(\chi)\omega_g(\eta).$$

Pontryagin İkiliği, Pontryagin dönüşümünün aynı zamanda birebir ve örten bir dönüşüm yani bir grup izomorfizması olduğunu söyler. Dolayısıyla bir YKD topolojik grup ile onun ikilisinin ikilisi izomorfizma altında aynıdır:

Teorem 3.5 (Pontryagin İkiliği, 1934). *G bir YKD topolojik grup ve $\hat{\hat{G}}$ onun ikilisinin ikilisi olsun. O zaman Pontryagin dönüşümü $\omega : G \rightarrow \hat{\hat{G}}$ bir grup izomorfizmasıdır yani $G = \hat{\hat{G}}$.*

Şimdi Pontryagin İkiliği'nin Fourier analizine önemli bir uygulamasından bahsedeceğiz. Fourier analizinin temel felsefesi, fonksiyonların, hali hazırda yapısını anladığımız trigonometrik fonksiyonların toplamlarıyla nasıl yaklaşılabileceğinin incelendiği alandır. Matematikten mühendisliğe, fizikten kimyaya ve biyolojiye uzanan çokgeniş bir spektrumda Fourier analizinin uygulamalarından bahsetmek mümkündür.

Pontryagin İkiliği'nin doğal bir sonucu *Fourier Tersinirlik Teoremi*'nin genelleştirilmesi olacak. Bu teorem bize bir fonksiyonun şayet Fourier dönüşümünü biliyorsak,

⁹ Örneğin, $\mathbb{R}^2$ 'deki tarak uzayı büzülebilir ancak yerel büzülebilir değildir. Bu tanımla, topolojik uzaylarda meydana gelebilecek yerel patolojilerin önüne geçiyoruz.

fonksiyonun kendisini belirlememizin mümkün olduğunu söyler (Rudin, 1962). Klasik Fourier analizini integraller vasıtasıyla, Lebesgue ölçüsüne göre yapıyoruz. Üzerinde integral alacağımız yapılar YKD topolojik gruplar olduğunda ise Lebesgue ölçüsü yerine Haar ölçüsüne ihtiyaç duyacağız.

Verilen bir X topolojik uzayı için, onun Borel kümelerinin koleksiyonu $B(X)$ tüm alt kümelerini ve bu alt kümelerin tümleyenlerini ve olası sayılabilir tüm kesişim ve birleşimlerini içerir. Şayet $\mu : B(X) \rightarrow [0, \infty]^n$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa *Haar ölçüsü* olarak adlandırılır:

$$(1) \mu(\emptyset) = 0.$$

$$(2) \text{ Verilen bir sayılabilir, ikişer olarak ayrık Borel kümeleri ailesi } (E_i)_{i \in I} \text{ için } \mu(\cup_{i \in I} E_i) = \sum_{i \in I} \mu(E_i).$$

$$(3) \text{ Her } E \in B(X) \text{ için } \mu(E) = \inf \{ \mu(U) : E \subset U \text{ ve } U, X' \text{ de açık küme} \}.$$

$$(4) \text{ Her } x \in X \text{ ve herhangi bir } E \in B(X) \text{ için } \mu(x+E) = \mu(X).$$

Verilen bir YKD topolojik grubu G için, Haar ölçüsü μ 'ye göre, G üzerindeki karmaşık değerli integrallenebilir tüm fonksiyonların uzayı $L^1_\mu(G)$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$L^1_\mu(G) = \left\{ f : G \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_G |f(x)| d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Şimdi $f \in L^1_\mu(G)$ olsun. O zaman f 'nin $\widehat{G}$ üzerindeki *Fourier dönüşümü* $\widehat{f}$ aşağıdaki integral yardımıyla tarif edilir:

$$\widehat{f}(x) = \int_G f(x) \overline{\chi(x)} d\mu(x).$$

Artık Pontryagin İkiliği de içerisinde doğrudan gözükecek biçimde Fourier Tersinirlik Teoremi'nin ifadesini yazacak kavram setine sahip kavram setine sahibiz¹⁰.

Teorem 3.6 (Fourier Tersinirlik Teoremi). G bir YKD topolojik grup ve μ, G üzerinde bir Haar ölçüsü olsun. O zaman $\widehat{G}$ üzerinde biricik $\widehat{\mu}$ Haar ölçüsü vardır öyle ki verilen her $f \in L^1_\mu(G)$ için $\widehat{f} \in L^1_{\widehat{\mu}}(\widehat{G})$ dir ve

$$f(x) = \int_{\widehat{G}} \widehat{f}(x) \chi(x) d\widehat{\mu}(x).$$

Başka bir deyişle aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$f(x) = \widehat{\widehat{f}}(\omega_{x^{-1}}).$$

¹⁰ Bu yönde çok daha derinlemesine bilgi edinmek için okuyucu Rudin (2017) ve Deitmar ve Echterhoff (2014) kitaplarına göz atabilir. Gösterimler çok daha modern olduğu için, teoremlerin ifadelerinde bu kaynaklara da başvurulmuştur.

4. GEOMETRİK TOPOLOJİ

Günümüz fizik biliminin yapı taşı olan uzay-zamanı 4-manifoldlar ile modelliyoruz. Dolayısıyla bu yapıları matematiksel olarak kavrama ve sınıflandırma uğraşı, dünyayı ve evreni anlama arayışımızla ayrılmaz bir bütündür. Klasik fizik teorilerini modellemek için bile türev kavramına ihtiyaç duyuyoruz. Örneğin, konum fonksiyonun zamana göre türevi hız fonksiyonunu, hız fonksiyonunun yine zamana göre türevi ise ivme fonksiyonunu verir. Şimdi türev kavramını 4-manifoldlara¹¹ nasıl taşıyacağımızı tartışacağız, bu yüzden şu ana kadar manifold dediğimiz yapıları yeni kavramdan farklılaştırmak adına hali hazırda kullandığımız yapıları *topolojik manifold* olarak adlandıralım. Bir topolojik manifold üzerindeki türev olgusunu tarif ettiğimiz yapıya da *pürüzsüz yapı* diyelim. Herhangi bir topolojik manifold üzerinde pürüzsüz yapının ne olduğunu tanımlamadan önce akla gelebilecek iki temel soru var. İlk olarak bu yapılar her zaman var mıdır? Şayet varlarsa biricik midir? Buiki sorunun cevabı da 4-manifoldlar için çoğu zaman hayır olacak. Pürüzsüz yapıya sahip topolojik 4-manifoldlara *pürüzsüz 4-manifold* diyeceğiz. Birden fazla pürüzsüz yapı ihtiva eden nesneler de *egzotik 4-manifold* olarak adlandırılır. Bir kıyaslama yapmak adına, örneğin, $n = 4$ değilse $\mathbb{R}^n$ üzerinde tek bir pürüzsüz yapı vardır (Stallings, 1962). Buna karşın $\mathbb{R}^4$ üzerine sayılamaz çoklukta pürüzsüz yapı konulabilir dolayısıyla bir egzotik 4-manifoldtur (Taubes, 1987).

Bir X topolojik 4-manifoldu üzerindeki bir *pürüzsüz yapı*, birbirine denk atlasların bir koleksiyonudur. X için bir *atlas*, pürüzsüz geçiş dönüşümleri $\varphi_{\alpha\beta}$ ile birlikte 4-manifoldu X 'i kaplayan $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ koordinat çizelgelerinin bir sistemidir. Şayet iki atlasın birleşimleri yine bir atlas ise, birbirlerine *denktir* diyoruz. Şayet iki pürüzsüz 4-manifold arasında pürüzsüz yapıyı koruyan, yani kendisi ve tersi pürüzsüz olan, bir homeomorfizma varsa ona *diffeomorfizma* diyoruz.

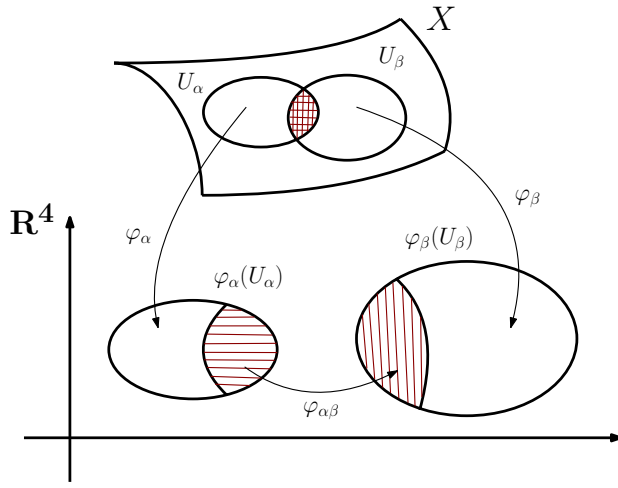
Bir G grubunun sonlu bir temsili verildiğinde, $\pi_1(X) = G$ temel grubuna sahip aşağıdaki gibi bir pürüzsüz kapalı 4-manifold X 'i inşa edebiliriz: Üreteç başına bir tane karşılık getirecek şekilde $S^1 \times S^3$ 'lerin bağlantılı toplamını alırsak ve $S^1 \times B^3$ 'leri $S^2 \times B^2$ ile değiştirecek şekilde ilişkilere karşılık gelen ilmekler üzerinde ameliyat yaparız.

Sovyet matematikçi S.I. Adyan göstermiştir ki sonlu grup temsillerinin tek elemanlı gruba karşılık gelip gelmediklerini belirlemek için uygulanabilecek hiçbir algoritma yoktur (Adyan, 1955). Yine bir diğer Sovyet matematikçi A. A. Markov¹² bu sonucu kullanarak aşağıdaki teoremi kanıtlamıştır.

Teorem 4.1 (Markov, 1958). *Herhangi iki kapalı 4-manifoldun birbirlerine diffeomorfik olup olmadığını belirleyebilecek bir algoritma yoktur.*

¹¹ Bu genelleme herhangi bir boyuttaki manifold için de aynıdır.

¹² Markov'un babası da A.A. Markov ismine sahip bir matematikçi olduğu için kimi kaynaklarda kendisinin A.A. Markov jr. olarak bahsedilmektedir.



Şekil 7. X 4-manifoldunun atlası için bir model.

Markov'un bu sonucundan sonra topolojiciler en azından temel grubu tek elemanlı grup olan bağlantılı 4-manifoldları sınıflandırabilir miyiz sorusuna odaklanmışlardır. Bu tip 4-manifoldlara *basit bağlantılı* diyoruz. Şayet Hurewicz teoremini, Poincaré İkiliği'ni ve evrensel katsayılar teoremini kullanırsak 4-manifoldun homoloji gruplarına dair hızlıca aşağıdaki gözlemi yapabiliriz:

$$H_0(X) = H_4(X) = \mathbb{Z}; H_1(X) = H_3(X) = 0; H_2(X) = \mathbb{Z}^r, r \geq 0.$$

Dahası 4-manifoldun ikinci homolojisi üzerinde, her zaman bir simetrik, unimodüler ve iki-doğrusal kesişim formu vardır:

$$Q_X : \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}.$$

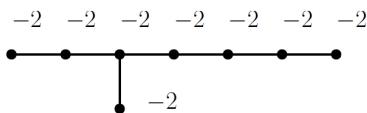
Şimdi bu formda her elemanı kendisiyle işleme soktuğumuzda bize bir çift tamsayı veriyorsa forma çift, aksi durumda ise *tek* diyoruz.

Sayıdığımız özelliklere sahip herhangi bir kesişim formunu gerçel sayılar R üzerinde $Q_X = m \langle 1 \rangle + n \langle 1 \rangle$ şeklinde ayrıştırabiliriz, üstelik bizim durumumuzda bu sayılar 4-manifoldun pozitif ve negatif özvektörlerinin sayısını tarif eder ve toplamaları *ikinci Betti sayısını* b_2 verir: $m = b_2^+(X)$, $n = b_2^-(X)$ ve $b_2 = b_2^+ + b_2^-$. Bu iki sayı arasındaki fark ise 4-manifoldların *işareti* denilen ve σ ile gösterilen önemli bir değişmezini oluşturur.

$$\sigma(X) = b_2^+(X) - b_2^-(X).$$

Bu değişmezle birlikte 4-manifoldların kesişim formları üzerindeki ilk büyük sonuç, Sovyet matematikçi V.I. Rokhlin'in aşağıdaki ünlü teoremidir:

Teorem 4.2 (Rokhlin, 1952). *X bir pürüzsüz, kapalı, basit bağlantılı 4-manifold olsun. Eğer Q_X çift ise $\sigma(X)$, 16'ya tam bölünür.*



Şekil 8. E_8 Dynkin diyagramı

Bir kesişim formunda her sıfırdan farklı elemanın aldığı değerin işareti aynıysa forma *belirli* diyoruz. Rokhlin'den sonra 4-boyutlu manifoldların topolojisine dair en kapsamlı gelişmeye İngiliz matematikçi S.K. Donaldson imza atmıştır. Bu çalışmasıyla birlikte fizik ile matematik bilimleri arasındaki derin ilişki bir kez daha gün yüzüne çıkmıştır. Makalesinin başlığında da nitelediği gibi, Donaldson ayar teorisini kullanarak 4-manifoldların topolojisine dair derin bir sonuç ortaya koymuştur. İntantonları merkeze alan yaklaşımı, kökeni kuantum alan teorisine dayanan Yang-Mills ayar teorisini modelleyen kısmi diferansiyel denklemlerinin özel bir çözümüne dayanmaktadır (Donaldson, 1983). Donaldson bu sonucu neticesinde, 1986 yılında düzenlenen Uluslararası Matematik Kongresi'nde, matematiğe bu katkısından dolayı Fields Madalyası'yla ödüllendirilmiştir.

Teorem 4.3 (Donaldson, 1983). *X bir pürüzsüz, kapalı, basit bağlantılı 4-manifold olsun. Eğer Q_X belirli ise köşegenleştirilebilir, yani bazı $n \in \mathbb{Z}$ için $Q_X \cong n \langle 1 \rangle$.*

M. Freedman kapalı, basit bağlantılı topolojik 4-manifoldları sınıflandırmıştır (Freedman, 1982). Bunun neticesinde dördüncü boyutta Poincaré sanısını da içeren bir çok önemli sonucu kanıtlamıştır. Freedman bu sarsıcı sonuçları neticesinde, Donaldson ile aynı yıl Fields Madalyası'na layık görülmüştür. Donaldson'ın sonuçlarıyla Freedman'ın sonuçları arasındaki kontrast, 4-manifoldların üzerindeki topolojik ve pürüzsüz yapı arasındaki kapatılamaz uçurumu daha berrak hale getirmiştir. Freedman'ın bu meşhur sonuçlarını elde ettiği makalesinden kesişim formlarıyla ilgili teoremi alıntılıyalım.

Teorem 4.4 (Freedman, 1982). *Her simetrik, ünimodüler, iki-doğrusal ve çift kesişim formu Q için, homeomorfizma altında biricik kapalı, basit bağlantılı, topolojik 4-manifold X vardır öyle ki $Q_X \cong Q$.*

Freedman'ın teoremini kullanarak E_8 Dynkin diyagramına karşılık gelen kesişim formuna sahip bir topolojik 4-manifoldtan bahsedebiliriz, W diyelim. Gösterilebilir ki W 'nin kesişim matrisi aşağıdaki gibidir ve dolayısıyla $\sigma(W) = -8$ 'tir. Bu durumda Rokhlin'in teoremi bize bu 4-manifoldun üzerine pürüzsüz yapı konulamayacağını söyler¹³.

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Sonuç 4.5. *Pürüzsüz olmayan topolojik 4-manifoldlar vardır.*

¹³ Donaldson'ın teoremi sadece W 'nin değil aynı zamanda W 'nin kendisiyle bağlantılı toplamı olan $W \# W$ 'nin üzerine de pürüzsüz yapı konulamayacağını söyler.

Amerikalı matematikçi E.E. Moise göstermiştir ki her topolojik 3-manifold biricik şekilde pürüzsüzleştirilebilir, yani üçüncü boyutta topolojik manifoldların kategorisiyle pürüzsüz manifoldların kategorisi eşittir (Moise, 1952). Ancak gördüğümüz gibi dördüncü boyutta pürüzsüzleştirilemeyen topolojik 4-manifoldlar var. Bu derin fark topolojicileri iki boyut arasındaki ilişkiyi çalıştırmaya da itmiştir. Bunun hemen arifesindeki en derin sonuçlardan biri yine Rokhlin tarafından elde edilmiştir.

Teorem 4.6 (Rokhlin, 1951). *Her kapalı, yönlendirilmiş 3-manifold bir kompakt, yönlendirilmiş, pürüzsüz 4-manifoldu sınırlar.*

Şimdi Y_0 ve Y_1 iki kapalı, yönlendirilmiş 3-manifold olsun. Kenarı $-(Y_0) \cup Y_1$ kompakt, yönlendirilmiş, pürüzsüz 4-manifoldlara *kobordizm* diyoruz. Bu ilişki vasıtasıyla bu tür 3-manifoldların kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı inşa edebiliriz. Bu sayede, manifoldlar arasındaki bağlantılı toplam işlemiyle birlikte bir grup yapısından bahsetmek mümkün hale gelir. Bu gruba *kobordizm grubu* diyoruz ve Ω_3 ile gösteriyoruz. Rokhlin'in yukarıdaki teoreminin doğrudan bir sonucu bu grubun tek elemanlı grup olduğudur.

Sonuç 4.7. *Kobordizm grubu tek elemanlı gruptur, yani $\Omega_3 = \{0\}$.*

Fransız matematikçi Poincaré ünlü sanısının ilk versiyonuna karşıt örnek vermiştir ve problemi revize etmiştir. Bu 3-manifoldta bugün *Poincaré homoloji küresi* diyoruz. Bu tanımdaki homoloji küresi vurgusu manifoldumuzun homoloji gruplarının S^3 'ün homoloji gruplarıyla aynı olduğu manasına gelmektedir.

Şimdi E_8 diyagramını yeniden düşünecek olursak buradan başlayarak bir pürüzsüz 4-manifold inşasından bahsedebiliriz. E_8 'in her köşesine karşılık S^2 üzerinde, orada yazan tam sayıya karşılık gelen Euler sayısına sahip bir D^2 demetini ele alalım. Şayet iki köşe arasında bir kenar varsa bu iki disk demetini *tesisatlayabiliriz*. Bu işlem köşe sayısına bağlı olarak sonlu bir işlem ve neticesinde kompakt, basit bağlantılı, yönlendirilmiş, pürüzsüz bir 4-manifold ederiz. Bu tip manifoldlara *tesisat 4-manifold* diyoruz. Poincaré homoloji küresi de tam olarak E_8 'e karşılık gelen butip 4-manifoldun kenarıdır (Saveliev, 2002).

Örneğin bu manifoldun temel grubu tek elemanlı grup olmadığı için S^3 'e homeomorfik olmadığını biliyoruz. Bu tip manifoldları çalışmak için yine kobordizm ilişkisinin bir varyasyonuna ihtiyaç duyacağız. Ancak bunu yazmadan önce iki önemli ve kısıtlayıcı sonucumuz var. İlki Rokhlin'in teoremi. Şayet homoloji kürelerinin kümesi üzerinde 4-manifoldta hiçbir koşul koymazsak yine bir tek elemanlı grup meydana gelecek. Diğer yandan Freedman'ın sınıflandırmasının sonucu gereği biliyoruz ki her homoloji küresi bir büzülebilir topolojik 4-manifoldu sınırlıyor. O yüzden aşağıdaki hassas tanıma ihtiyacımız var.

Şu andan itibaren Y_0 ve Y_1 iki yönlendirilmiş homoloji küresi olsun. Bu sefer kenarı $-(Y_0) \cup Y_1$ olan ve $S^3 \times [0, 1]$ 'in homolojisine sahip, kompakt, yönlendirilmiş, pürüzsüz 4-manifoldlara *homoloji kobordizm* diyoruz. Bu ilişki ile benzer bir şekilde homoloji kürelerinin kümesi üzerine bir grup yapısı oluşturuyoruz. Ortaya çıkan yapıyı *homoloji kobordizm grubu* olarak adlandırıyoruz ve $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ ile gösteriyoruz.

Rokhlin'in bir diğer önemli sonucu da bu gruptan iki elemanlı grup $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 'e yazılabilen bir örten grup homomorfizmasını varlığıdır ve yaygın bir biçimde Rokhlin değişmezi veya Rokhlin homomorfizması olarak bilinir.

Teorem 4.8 (Rokhlin, 1952). *Y bir homoloji küresi, W kenarı Y olan bir kompakt, yönlendirilmiş, pürüzsüz 4-manifold olsun. O zaman*

$$\mu : \Theta_{\mathbb{Z}}^3 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \quad \mu(Y) = \sigma(W)/8 \mod 2$$

bir örten grup homomorfizmasıdır.

Poincaré homoloji küresi, E_8 'e karşılık gelen tesisat 4-manifoldun kenarı olduğundan Rokhlin değişmezi 1'dir. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 4.9. *Homoloji kobordizm grubu tek elemanlı grup değildir, yani $\Theta_{\mathbb{Z}}^3 \neq \{0\}$.*

Rokhlin değişmezi ve homoloji kobordizm grubu modern topolojinin en temel ve merkezi nesnelerinden olagelmışlerdir (Manolescu, 2018). Örneğin, Manolescu'nun inşa ettiği β değişmezi hem Rokhlin'in μ değişmezinin tamsayılara genellemesidir hem de aynı zamanda $\Theta_{\mathbb{Z}}^3$ grubunun değişmezidir. Bu değişmezin varlığı sayesinde Manolescu meşhur Üçgenleştirme Sanısı'nı çürütmüştür. Bu sayede boyutu 5'ten büyük eşit topolojik manifoldların her zaman üçgenleştirilemeyeceğini biliyoruz (Manolescu, 2016). Casson'un çalışmaları sayesinde dördüncü boyutta da üçgenleştirme sanısının doğru olmadığını biliyoruz (Akbulut-McCarthy, 1990). Üç ve üçten küçük boyutlarda ise sanının doğruluğu kanıtlanmıştır.

5. SONUÇ

Sovyet topolojisinin kırk bir yıllık tarihini matematiğiyle birlikte sunan bu çerçeve yazısı bu mecraya giriş niteliğinde kabul edilmelidir. Bir kaç kez vurgulandığı üzere bu makale üretilen matematiksel bilginin tümüne değil üç temel topoloji alanındaki kimi mihenk taşlarına odaklanmıştır. Çeşitlendirmeye ve derinleştirmeye tarihinin kendisinin izin verdiği üzere açıktır.

Yazım sürecinde, mevcut matematiksel bilgiyi açıklamak kadar güncel matematik ile bağını tarif etmek de eş düzeyde önemsenmiştir. Bu nedenle matematiksel tanımlar, ifadeler ve teoremler yer yer çok teknikleşmiş olup, bunun dozunun biraz daha azaltılması Sovyet topolojisinin kendisini yadsıyacağı ve nitelikli üretimin hissedilmemesine sebebiyet vereceği için özellikle kaçınılmıştır. Bununla bir-

likte teorilerin kavranabilmesi için mümkün olan en sade ve anlaşılır örnekler ve anekdotlar seçilmeye çalışılmıştır. Bu uğurda özellikle matematiksel tanımların arkasındaki sezginin açıklanmasına gayret gösterilmiştir.

İnsanlık olarak gördüğümüzü kavrama ve değiştirme maceramızdaki en büyük araçlardan biri olagelen topolojinin matematik, fizik, kimya ve biyoloji bilimleri olan sıkı ilişkisi kuşkusuz ki derinleşerek devam edecektir. Makalenin bir kısmını sunduğu üzere bu kavrayışımızı Sovyet bilim insanlarına da borçluyuz.

KAYNAKLAR

- Akbulut, S., McCarthy, J. D. (1990). Casson's Invariant for Oriented Homology Three-Spheres: An Exposition. (MN-36) (Vol. 36). Princeton University Press.
- Aryan, S.I. (1955). Algorithmic unsolvability of problems of recognition of certain properties of groups. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 103. 533-535.
- Aleksandrov, A.D. (1947). Geometry and topology in the Soviet Union. I. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 2(4). 3-58.
- Alexandroff, P.S. (1924). Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räume. *Mathematische Annalen*, 92(3). 294-301.
- Alexandrov, P.S., Urysohn, P.S. (1929). Mémoire sur les espaces topologiques compacts. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Te Amsterdam, Proceedings of the Section of Mathematical Sciences*, 14.
- Alexander, J.W. (1915). A proof of the invariance of certain constants of analysis situs. *Transactions of the American Mathematical Society*, 16(2). 148-154.
- Boi, L. (2019). The role of intuition and formal thinking in Kant, Riemann, Husserl, Poincaré, Weyl, and in current mathematics and physics. *Kairois*, 22(1).
- Deitmar, A., Echterhoff, S. (2014). Principles of harmonic analysis. *Springer*.
- Donaldson, S. K. (1983). An application of gauge theory to four-dimensional topology. *Journal of Differential Geometry*, 18(2). 279-315.
- Euler, L. (n.d.). (1970-1979). *The Great Soviet Encyclopedia*, 3rd Edition. Erişim tarihi: 16.08.2021 <https://encyclopedia2.thefreedictionary.com/Euler%2c+Leonhard>
- Euler, L. (1741). Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis. *Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae*, 128-140.
- Euler, L. (1758). Elementa doctrinae solidorum, *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 4 (1752/3), p. 109-140. reprinted in *Opera Omnia, Series I, Vol. 26*. 71-93.
- Hatcher, A. (2002). Algebraic Topology. *Cambridge University Press, Cambridge*. xii+544.
- Freedman, M.H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 17 (3). 357-453.
- Kline, M. (1990). Mathematical Thought from Ancient to Modern Times: Volume 3. *Oxford University Press*.
- Lapko, A.F., Lyusternik, L.A. (1957). Mathematical sessions and conferences in the USSR. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 12(6). 47-130.
- Mathematics (n.d.). (1970-1979). *The Great Soviet Encyclopedia*, 3rd Edition. Erişim tarihi: 16.08.2021 <https://encyclopedia2.thefreedictionary.com/mathematics>
- Moise, E. (1952). Affine structures in 3-manifolds. V. The triangulation theorem and Hauptvermutung. *Annals of Mathematics*, 56. 96-114.
- Manolescu, C. (2016). Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture. *Journal of the American Mathematical Society*, 29 (1) 147- 176.
- Manolescu, C. (2018). Homology cobordism and triangulations. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Rio de Janeiro 2018*.
- Markov, A. (1958). The insolubility of the problem of homeomorphy. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 121. 218-220.
- Poincaré, H. (1895). Analysis situs. *Paris, France: Gauthier-Villars*. 1-121
- Pontrjagin, L.S. (1934). The theory of topological commutative groups. *Annals of Mathematics*. 361-388.
- Pontryagin, L.S. (1986). Selected Works, vol. 2. Topological Groups. Ed. R.V Gamkrelidze. Trans. A. Brown. 3rd ed. *Classics of Soviet Mathematics. New York: Gordon & Breach Science Publishers*.
- Raman-Sundström, M. (2015). A pedagogical history of compactness. *The American Mathematical Monthly*, 122(7). 619-635.
- Rokhlin, V.A. (1951). A three-dimensional manifold is the boundary of a four-dimensional one. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 81. 355 - 357.
- Rokhlin, V.A. (1952). New results in the theory of four-dimensional manifolds. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 84. 221 - 224.
- Sitnikov, K. (1951). The duality law for non-closed sets. *Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 81. 359-362.
- Skyarenko, E.G. (2011). Pontryagin duality. *Encyclopedia of Mathematics*. Erişim tarihi: 16.08.2021 http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Pontryagin_duality&oldid=49720
- Riemann, B. (1851). Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. *Adalbert Rente*.
- Rudin, W. (2017). Fourier analysis on groups. *Courier Dover Publications*.
- Saveliev, N. (2002). Invariants of Homology 3-spheres (Vol. 140). *Springer Science & Business Media*.
- Stallings, J. (1962). The piecewise-linear structure of Euclidean space. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 58(3). 481-488.
- Şavk, O. (2019a). Königsberg'in yedi köprüsü ve topolojinin doğuşu. *Bilim ve Aydınlanma Akademisi*. Erişim tarihi: 16.08.2021. <https://bilimveaydinlanma.org/konigsbergin-yedi-koprusu-ve-topolojinin-dogusu/>
- Şavk, O. (2019b). Euler'in çökyüzlü formülü. *Bilim ve Aydınlanma Akademisi*. Erişim tarihi: 16.08.2021. <https://bilimveaydinlanma.org/eulerin-cok-yuzlu-formulu/>
- Şavk, O. (2019c). Euler'in çökyüzlü formülünün kanıtı. *Bilim ve Aydınlanma Akademisi*. Erişim tarihi: 16.08.2021. <https://bilimveaydinlanma.org/eulerin-cok-yuzlu-formulun-kaniti/>
- Taubes, C. H. (1987). Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *Journal of Differential Geometry*, 25(3). 363-430.
- Whitney, H. (1992). Moscow 1935: topology moving toward America. In Hassler Whitney Collected Papers (pp. 1-21). *Birkhäuser Boston*.