

# MARX'IN MATEMATİKSEL ELYAZMALARI

Bahadır Batur<sup>(1)</sup>, Serkan Doğan<sup>(2)</sup>,  
Emre Güngör<sup>(3)</sup>, Engin Özkan<sup>(4)</sup>

## ÖZET

Bilimsel sosyalizmin Friedrich Engels ile birlikte kurucusu sayılan Karl Marx, hayatı boyunca çalıştığı her konunun bilimsel temellerini diyalektik yöntemle inceledi, farklı görüşlerle tartıştı ve ortaya dünya tarihini derinden etkileyen bir külliyat bıraktı. 1883'te öldüğünde geriye incelenmesi ve tasnif edilmesi yıllar sürecek binlerce sayfalık miras bırakmıştı. Marx, o kadar fazla alanda çalışma yürütmüştü ki matematik ile ilgilenmesi şaşırtılamayacak bir durumdu. Bu makalede Karl Marx'ın ölümünden ancak 85 yıl sonra Sovyet Sosyalist Cumhuriyetler Birliği'nde yayımlanabilen küçük puntolarla yazılmış yaklaşık 1000 sayfalık *Matematiksel Elyazmalarını* (Marx, 1983) inceleyeceğiz.

**Anahtar Kelimeler:** Marx, Diyalektik, Matematik, Elyazmaları, Türev.

## MATEMATİKSEL ELYAZMALARININ<sup>(5)</sup> SERÜVENİ

Marx'ın matematik çalışmalarının varlığıyla ilgili elimizdeki ilk bilgi, Alman Sosyal Demokrat Partisi (SPD)'nin yayını *Vorwärts*'ta tefrika edilen Engels'in *Anti-Dühring* eseridir.

*Oysa, Karl Marks'ın ölümünden sonra zamanım, en gecikmez ödevler tarafından alınmıştı, ve işime ara vermek zorunda kaldım. Durum değişene değin bu kitapta verilen bilgilerle yetinmesini ve çıkacak bir fırsatın bana elde edilen sonuçları bir araya getirme ve onları belki de Marks tarafından bırakılmış son derece önemli matematik elyazmaları ile birlikte yayınlama olanağını bana sağlamasını beklemem gerekiyor.* (Engels, 1995)

Bu eser ve daha sonra yayımlayacağı *Doğanın Diyalektiği* eserlerinde Engels'in matematik bilimi, matematikçi ve matematik felsefesi üzerine yazıları Marx ve Engels'in matematiksel algısı ve matematik tartışmaları hakkında

fikir edinmemizi sağlamaktadır. Elyazmalarının basım serüvenini derli toplu en iyi biçimde veren makale ise Pradip Baksi'nin makalesi (Baksi, 1994)<sup>(6)</sup> olarak görülebilir.

1895'te Engels'in ölümü üzerine Alman Sosyal Demokrat Partisi (Matematiksel Elyazmaları da dâhil olmak üzere) Marx ve Engels'in tüm yapıtlarının, defterlerinin, elyazmalarının birincil yayımcısı ve koruyucusu haline geldi ve tüm elyazmalarını incelemeye karar verdi. Her ne kadar Alman Sosyal Demokrat Partisi liderlerinden olan Franz Mehring, matematik elyazmalarını bazı matematikçilere incelediğini ve bu belgelerin Engels ve Lafargue'in iddia ettiği gibi bir öneminin olmadığı iddia etse de (Mehring, 1962) *Anti-Dühring*'in önsözünde Engels'in bahsetmiş olduğu Marx'ın matematik çalışmaları o tarihlerde de ilgiyle karşılandı. Burada Alman Sosyal Demokratların sahip olduğu matematik bilgisinin yeterli olmayışı da Marx'ın matematik çalışmalarının basımını geciktiren bir neden olarak görülebilir. Mehring'in bu açıklamasından sonra Matematiksel Elyazmalarına olan ilgi ve elyazmalarının yayına hazırlanmasına yönelik beklenti azaldı.

1917 Büyük Ekim Devrimi öncesinde ise David Riazanov (1870-1938), Marx ve Engels'in çalışmalarını in-

- 1 Lisans öğrencisi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
- 2 Lisans öğrencisi, Bilkent Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
- 3 Lisansüstü öğrencisi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü
- 4 Dr., TED Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, enozkan1234@gmail.com
- 5 Burada "Matematiksel Elyazmaları" tabirini Marx'ın matematik alanında bıraktığı elyazmalarını vurgulamak için belirtiyoruz. Matematik Elyazmaları da kullanılabilir ancak Matematiksel kavramının konuyu daha iyi ifade ettiği kanaatine sahibiz.

- 6 *Elyazmalarının* yayımlanma sürecini en derli toplu olarak ortaya koyan bu makale, bu bölümün şekillenmesinde büyük bir pay sahibidir. Ayrıca Baksi makalesinin sonunda 1994'e kadar yayımlanmış bulunan *Matematiksel Elyazmalarının* farklı dillerdeki baskılarını ve *Elyazmaları* üzerine yazılan makale kitapların bulunduğu bir bibliyografi de eklemiştir.

celemeye çoktan başlamıştı. Alman Sosyal Demokrat Partisi'nin Berlin'deki arşivlerinde çalışan Riazanov, Matematiksel Elyazmalarının arşivlerde bulunmadığını fark etti. Sonraki araştırmalarında SDP'nin liderlerinden Eduard Bernstein'nin (1850-1932) belgeleri ve defterleri incelemek için kendi dairesine götürdüğünü öğrendi. Bernstein'dan belgeleri alamayan Riazanov, Avusturya Sosyal Demokrat Partisi liderlerinden Frederick Adler (1879-1960)'e ulaşarak elyazmalarını inceleyip yayımlamak istediğini belirterek kendisine aracılık etmesini rica etti, ancak sonuç alamadı. Matematiksel Elyazmalarının önemi özellikle Lenin'in "Materyalizm ve Ampriyokritisizm" çalışmasında Marx ve Engels'in felsefi çalışmalarına yoğunlaşmasıyla ortaya çıktı denilebilir.

1917 Devrimi'nden sonra Moskova'da Marx-Engels Enstitüsü kuruldu ve Riazanov enstitünün yöneticisi olarak görevlendirildi. Enstitü Alman Sosyal Demokrat Partisi'nden Marx ve Engels'in tüm çalışmalarının kopyalarını istedi. Uzun uğraşlar sonucunda Sosyal Demokrat Parti arşivlerinden belgeler toplandı. 1925 yılında Moskova Marx-Engels Enstitüsü'nün elinde toplamda 865 sayfalık Marx'ın matematik çalışmalarının fotokopileri birikmişti.

Eisentein'nin referans olduğu ve gelişiminde etkili olduğu Alman matematikçi E. Gumbel, Riazanov'un daveti üzerine Enstitü'ye gelerek elyazmaları üstüne çalışmaya başladı. O dönemde R. Mateika ve R.S. Bogdan da Gumbel'in çalışmalarına yardımcı oldular. 1927 yılında Gumbel, Letopisi Marksizma'da elyazmalarını kısaca tanıtan bir rapor yayınladı. Elyazmalarını dört kategoriye ayırdı: Hiçbir metin olmaksızın hesaplamalar, Marx'ın okuduğu yapıtlardan özetler, kendi çalışma taslakları ve son olarak da bitmiş özgün çalışmalar. Marx'ın özetlediği matematiksel yapıtların listesini sundu: 13 yazar ve 18 başlık. Marx'ın incelediği yapıtların en eskisinin Newton'nun Principia'sı, en yenisinin de 1852 tarihli T.J.Hall ve J.W.Hemmings'in ders kitapları olduğunu belirtti. Fakat Enstitü'nün Ernst Kolman'ın da içinde bulunduğu üyeleri elyazmalarının yayına hazır olmadığını düşünmekteydi. Onlara göre elyazmaları üzerine daha çok çalışılmalı ve eksiksiz ve hatasız olarak yayınlanmalıydı. Marx-Engels Enstitüsü direktörü olan Riazanov'un o yıllarda Marx ve Engels'in tüm yazılarını toplama çalışması da devam etmekteydi. 1931'de ise Riazanov'un Enstitü'deki ve Sovyetler Birliği Komünist Partisi'ndeki görevlerinden uzaklaştırılması sonrasında, Bolşevik partinin ünlü eylem adamı Vladimir Viktorovich Adoratsky (1878-1945) Enstitü'nün yeni yöneticisi olarak görevlendirildi. Riazanov'un görevden uzaklaştırılmasıyla Gumbel de görevden uzaklaştırıldı ve Gumbel'in yapmış olduğu çalışmalarla birlikte Marx'ın matematik çalışmaları

rının kopyaları Sofya Aleksandrovna Yanovskaya<sup>[7]</sup> (1896-1966)'nın önderlik ettiği D.A.Raikov ve A.İ. Nakhimovskaya'nın yer aldığı ekibe teslim edildi.

1933'te Marx'ın 50. ölüm yıldönümü anması dolayısıyla Marx'ın diferansiyel kalkülüs üstüne iki makalesi ve Yanovskaya'nın editöryal bir makalesi *Pod Znamenem Marksizma* dergisinde<sup>[8]</sup> ve Marx için hazırlanan *Marksizm i estestvoznaniye* derlemesinde (Dauben, Scriba, 2002) yayımlandı. Marx'ın Matematiksel Elyazmaları üzerine ilk basılı yayın böylece ölümünden 50 yıl sonra paylaşılmış oldu.

1931'de Londra'da düzenlenen Bilim Tarihi Kongresi sırasında Sovyetler Birliği delegasyonunun üyesi olan E. Kolman, kongrede "Karl Marx'ın Matematik, Doğal Bilimler, Teknoloji ve Bunların Tarihleriyle İlgili Yayımlanmış Çalışmaları" başlıklı bir rapor sunar (Kolman, 1931). Bu raporun ardından matematikçiler arasında Marx'ın matematiksel çalışmalarını incelemek üzere artan bir ilgi oluşur. 1935 yılında Valerii Glivenko (1897-1940), Fransız matematikçi Hadamard'ın ve Marx'ın türev üzerine yazdıklarını karşılaştıran bir makale kaleme alır. Elyazmalarıyla ilgili Batı'da çıkan ilk makale 1948 yılında Dirk Jan Struik tarafından yazılan ve "Science and Society" dergisinde yayınlanan "Marx and Mathematics" başlıklı makalesidir (Gerdes, 2014).

II. Dünya Savaşı sırasında büyük bir trajedi yaşayacak olan Sovyetler Birliği'nde Moskova'da bulunan tüm arşivler ve kütüphaneler yaklaşan "faşizm" tehlikesi dolayısıyla doğuya taşınmak zorundaydı, böylece Enstitü'nün tüm çalışmaları yavaşlamak veya durmak zorunda kaldı. Bunun üzerine Yanovskaya ve ekibi kendi çalışmalarına dönmek zorunda kaldılar. Yanovskaya, Moskova Üniversitesi'nde matematiksel mantık dersleri vermeye devam etti ve matematiksel mantık, matematik tarihi gibi konularda yayınlar ve çeviriler yaparak Sovyet matematiğine katkılarda bulundu.<sup>[9]</sup>

7 Sofya A. Yanovskaya döneminin genç ve ünlü Sovyet matematikçilerinden biriydi. Hayatının her döneminde komünizm mücadelesinin içerisinde bulunmuştur. Timchenko ve Shatunovsky ile çalışan Yanovskaya, 1919 yılında Kızıl Ordu adına Odesa'da siyasi komiserlik ve *Kommunist* gazetesinin editörlüğü yapmıştır. 1935'te Sovyetler Birliği'ne gelen Ludwig Wittgenstein'in görüşüğü insanlardan biri de yine Yanovskaya'dır. Bu bilgi bile Yanovskaya'nın döneminde matematik ve felsefe camiasında tanındığını, kendisinden fikir alındığı göstermektedir. Yanovskaya, 1959 yılında Moskova Şehir Üniversitesi (*Moscow State University*)'nin Matematiksel Mantık Departmanı'nın ilk yöneticisi olmuştur. 1951'de Lenin Nişanı ile ödüllendirilmiştir. <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Janovskaja.html>

8 *Marx's brilliant study of mathematics*, Labour Review(WRP), 1983. <https://www.marxists.org/archive/marx/works/1881/mathematical-manuscripts/review.htm> (Son kontrol: 28.03.2018)

9 Yanovskaya, standart-dışı analizden mantığa, Mısır ve Antik Yunan matematiğinden büyük Rus matematikçi Lobachevsky'nin Euclid dışı geometri çalışmalarına kadar geniş bir yelpazade üzerine yayınlar yaptı. En büyük çalışmalarından biri ilk bölümü 1948'de ikinci bölümü 1959'da yayınlanan matematiksel mantık tarihi üzerine hazırladığı kitaptır. Bunlara ek olarak Hilbert, Ackerman, Tarski, Polya, Carnap, Turing, Goodstein, Church, Kleene gibi biliminsanlarının kitaplarının ve makalelerini Rusça'ya çevirmiştir.

<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Janovskaja.html>

Savaşın getirdiği yıkım ile birlikte çalışmalarına ara vermek zorunda kalan Enstitü çalışanları Sovyetler Birliği'nin Nazilere karşı kazandığı zafer ve savaşın resmi olarak bitmesi sonucunda çalışmalarına geri dönmeye başladılar. Budapeşte'de 1950 yılında düzenlenen matematik kongresi sırasında diğer sosyalist ülkelerden gelen matematikçiler Sovyetler Birliği heyetine Marx'ın Matematiksel Elyazmaları üstüne çalışmaların durumunu ve elyazmalarının ne zaman yayınlanacağını sorar, bu soruya elyazmaları üzerine çalışan heyetin de tam bir cevabı bulunmamaktaydı. Bu gelişmenin ardından SSCB'ye dönen heyet sorumluluk alarak *Matematiksel Elyazmaları*'nın acilen yayınlanması gerektiğini Enstitü'ye iletiler. Yanovskaya da böylece elyazmaları çalışmalarına dönebildi. Kendisine yeni bir asistan verildi: Konstantin Alekseievich Rybnikov. 1958'de ise Marx'ın "On the Concept of Functions (Fonksiyonlar Kavramı Üzerine)" makalesi *Voprosy Filosofii* dergisinde yayınlandı.

Bu dönemde karşılaşılan temel sorun ise Marx'ın diğer el yazmaları gibi Matematiksel Elyazmaları'nın da bazı parçalarının eksik olması ve eksik belgelerin farklı yerlerde bulunmasıydı. Riazanov ve ekibi 1924-1930 yılları arasında Alman Sosyal Demokrat Partisi'nin arşivlerinden 5500 sayfadan daha fazla yazmanın fotokopisini elde etmişlerdi. Lakin bazı belgelerin kopyaları elde edilememiş ya da gözden kaçmıştı. II. Dünya Savaşı öncesinde, 19 Mayıs 1938, Alman Sosyal Demokrat Partisi'nin arşivleri Amsterdam'daki *International Institute of Social History*'e devredilmişti. Sovyetler Birliği'nden bir heyet Ağustos 1964'te Marx'ın çalışmalarının eksik parçalarını bulabilmek için Amsterdam'a gitti. Bu ekipte bulunan kişilerden biri de Olga Konstantinovna Senekina idi. Senekina Matematiksel Elyazmaları'nın eksik parçalarını buldu ve bunların kopyalarını elde etti. 1968 basımlı *Matematiksel Elyazmaları*'nın önsözünden biliyoruz ki Amsterdam'daki çalışmalar ile birlikte Marx'ın Matematiksel Elyazmalarının kopyaları neredeyse 1000 sayfaya ulaşmıştır.

1968 yılında basılacak olan *Matematiksel Elyazmaları*'nın editörü Yanovskaya yıllardır üzerine çalıştığı kitabın basımını göremeden 1966'da öldü. Öldüğü sırada kitap üstüne çalışması neredeyse tamamlanmıştı. 1968'de Marx'ın doğumunun 150.yıldönümünde büyük Sovyet matematikçileri Andrey Kolmogorov ve Ivan Petrovsky'nin yardım ve tavsiyeleri doğrultusunda 639 sayfalık basım K.A. Rybnikov, O.K. Senekina ve A.S.Ryvkin'in gözetiminde yayınlandı.<sup>[10]</sup> Bu basımın önsözünde 1931'den beri devam eden çalışmaların detaylı bir hali tarif edilmektedir. Bu basımda söz edilmeyen şey ise *Matematiksel Elyazmaları*'nın henüz tamamlanmamış bir çalışma olduğudur. 1968 basımlı

kitabın belli parçalarının eksik olması bilimsel ve tarihsel bir çalışma olan *Matematiksel Elyazmaları*'nın Marksist külliyatı içinde eksikli bir parça olmasına neden olmaktadır. Benzer şekilde 1974 yılında Federal Almanya'da Almanca baskısı ve Pekin Üniversitesi tarafından Çince baskısı yapıldı. 1975 yılında ise İtalyanca baskısı yayınlandı. 1987 yılının sonlarında ise Irina Konstantinovna Antonova tam ve eksiksiz olarak *Matematiksel Elyazmaları*'nın basımını gerçekleştirmek için çalışmalara başladı. Moskova Marksizm-Leninizm Enstitüsü'nde çalışmakta olan Antonova, 1990 yılında eksiksiz basımın gerçekleşeceğini umduğunu duyurdu. Bunun üzerine Moskova ve Berlin'de bulunan Marksizm-Leninizm Enstitüleri'nden uzmanlar da Antonova'ya yardımcı olmak için çalışmaya başladı. Ancak 1989'da Federal ve Demokratik Almanya'nın birleşmesi, Sovyet Sosyalist Cumhuriyetler Birliği'nin çözülüşü bu çalışmanın sonlanmasını engel oldu.

Sarf edilen tüm çabalara rağmen bu bölümde yazılan pek çok bilginin kaynağı olan Pradip Baksi'nin belirtilen makalesinde dile getirdiği soru "*Matematiksel Elyazmaları'nın ve pek tabii Marx ve Engels'e ait eksik bulunan diğer metinlerin de eksiksiz, tam bir basımı ne zaman, nerede ve nasıl yayınlanacak?*" hala cevaplanmayı beklemektedir (Baksi, 1994). Bu soruyu cevaplamak tüm Marksistlerin görevidir.

*Matematiksel Elyazmaları*, Türkçe'ye Öner Ünalın<sup>[11]</sup> çevirisiyle Başak Yayınları tarafından basılmıştır. *Matematiksel Elyazmaları*'nın Türkçe çevirisi önemli bir kazanım olmakla birlikte bütünlüklü, sağlıklı bir çeviri olmadığı görüşü matematikçiler arasında yaygındır. Metin içerisinde tercih edilen matematik terimlerinin çevirileri, bazı kısımların yanlış çeviri yapılmış olması bu kanaatin oluşmasına neden olmaktadır. Dönemin bilgiye ve ihtiyaç duyulan tekniğe ulaşım konusunda sahip olduğu yetersizlikleri bunun nedeni olarak görülebilir. Başak Yayınları'na ve çevirmen Öner Ünalın'a da çalışmaları nedeniyle teşekkür etmemiz gerekmektedir.

## MARX NEDEN MATEMATİK ÇALIŞTI?

1840'ların ortalarından ölüm tarihi olan 1883'e kadar belirli aralıklarla ve farklı yoğunluklarda matematik çalışan Marx'ın matematik bilgisine dair farklı görüşler mevcuttur. Marx hakkında bir biyografi kaleme almış McLellan'a göre Marx'ın okuldaki matematik performansının zayıf olduğu (McLellan, 2006) dile getirilirken, Marx'ın Matematiksel Elyazmaları üzerine de çalışan bilim tarihçisi H. Kennedy ise Marx'ın Trier'de devam ettiği Gynasium'dan aldığı sertifikaya dayanarak matematik bilgisinin iyi olduğunu savun-

10 Marx, Karl. 1994. *Mathematical Manuscripts: Togetger with a Special Supplement*, Calcutta: Viswakos Parisad, s. 2-15., ayriyeten Türkçe baskının 1968 Rusça Basıma Önsöz.

11 Birçok Marxist klasiği ve Darwin'in Türlerin Kökeni ve Seksüel Seçme eserleri gibi daha nice eseri dilimize kazandıran değerli Öner Ünalın'ın matematiksel terimlerin çevirisinde kullandığı kelimeler kitabı bazı noktalarda zor okunur hale getirmektedir.

maktadır (Kennedy, 1977). Struik de Marx'ın 1835'te Gynasium'dan mezun olduğunda trigonometri, analitik geometri, cebir ve kalkülüs bilgisine sahip olduğunu dile getirir (Struik, 1948). Her ne kadar birbirinden farklı görüşler bulunsun da bu görüşlerden hiçbirisi Marx'ın neden matematik çalıştığı sorusuna yeterli cevap olmamaktadır. Zira Marx'ın matematikle ilgilenmesinin nedeni sadece matematiğe duyduğu ilgi değildir. Her ne kadar boş zamanlarında bir dinlenme ve eğlence faaliyeti olarak çalışsa da asıl motivasyonu başka bir noktada aramak gerekmektedir. Eşi Jenny'nin çiçek hastalağından muzdarip olduğu dönemde yoldaşı Engels'e ilettiği 23 Kasım 1860 tarihli mektubunda bu durumu dile getirmektedir "... makale yazmak benim için söz konusu bile değil. Zihnimi sakinliğini koruyabildiğim tek aktivite matematik." (Marx, Engels Collected Works, vol.30, 1964, syf 113). Yine Engels'e ilettiği 6 Temmuz 1863 tarihli mektubu da matematikle yoğun bir şekilde çalıştığını göstermektedir.

*Boş zamanlarımda diferansiyel ve integral kalkülüs çalışıyorum. Sırası gelmişken, elimde birçok kitap var ve bu alanla uğraşmak istersen bazılarını sana göndereceğim. Askeri çalışmaların için gerekli olduğunu düşünüyorum. Ayrıca matematiğin, örneğin soyut cebirden, daha kolay bir kısmı (tabii sadece teknik kısmı düşünülüğünde). Bazı temel cebirsel ve trigonometrik bilgiler ve konik kesitleri hakkında genel bir bilgi, dışında hazırlanmana gerek olmayacaktır.* (Marx, Engels Collected Works, vol 29, 1963, syf 362).

Marx'ın matematiğe ilgisi, zorunluluğu kavranmış bir özgür faaliyet süreci olarak görülebilir.

Marx'ın matematikle ilgilenmesinin temelde iki sebebi vardı: ekonomi-politik ve felsefe. Fransız matematikçi Paul Labèrenne, Marx ve Matematik adlı çalışmasında bu iki yönlü hedefi şöyle dile getirmektedir;

*Yaşamını sonlarına doğru Marx matematiği daha detaylı çalışmaya başladı. Onun iki yönlü ilgisi Kapital'de çok net bir şekilde açıkladığı ekonomi yasalarını cebirsel bir formda ifade etmek ve matematiksel analizin bazı argümanları diyalektik yöntem yardımıyla yeniden tartışmak.* (Labèrenne, 1971)

Marx, 1848'de işçi sınıfının aldığı yenilgi sonrasında ekonomi alanındaki teorik çalışmalarına daha fazla yoğunlaştı. Marx *Kapital*'i yazarken, matematiği, ekonomi ilkelerini yalnızca matematiksel olarak ifade etmek için kullanmadı. Değer ve paranın analizi, sermaye bileşimi, artı değer oranı, kar oranı, sermayenin değişim süreci, dolaşımı ve cirosu, yeniden üretimi, birikimi, kredi sermayesi gibi pek çok şeyi incelemek için Marx matematiği yoğun olarak kullandı. Zira nerede bir sayma işlemi veya hesaplama varsa doğası gereği orada da matematiğe ihtiyaç vardır. Marx da bu ihtiyaçtan kaçamazdı.

Ancak Marx'ın kullandığı matematik onu pek tatmin etmediği gibi üzerine daha fazla çalışmasını gerektirdi. Engels'e yazdığı 11 Ocak 1858 tarihli mektupta şöyle diyor Marx;

*Ekonomi yasalarıyla ayrıntılı bir şekilde uğraşırken hesaplama hataları beni o kadar yavaşlatıyor ki çaresizlikten cebire hızlıca tekrar bakmam gerekti. Aritmetik bana her zaman yabancıydı. Lakin cebir yoluyla hızlı öğreniyorum.* (Marx, 1983, syf VIII)

Bununla birlikte felsefi olarak diyalektik yöntemin geliştirilmesi amacıyla da Marx'ın matematik çalıştığı söylenebilir. Matematik doğanın anlaşılmasında kullanılan önemli bir araçtır. Doğanın diyalektik sürecini daha iyi kavramaya çalışan Marx, matematiğe de bu nedenle özel bir önem verir. Marx'ın Matematiksel Elyazmaları her ne kadar matematiksel bir öneme sahipse de Marx'ın elyazmalarında daha çok anlamaya çalıştığı şey bir yöntem sorunudur. Marx'ın bu dönemde okuduğu matematik kitapları 17. ve 18. yüzyıl büyük matematikçilerinin etkisi altındaki popüler okul kitaplarıdır. Lacroix, Bouchardat ve Hind'in okul kitapları Marx'ın başvurduğu ve yararlandığı başlıca kaynaklardı (Struik, 1948). Ancak Marx, "Türev mi diferansiyelden türedi yoksa tersi mi doğru?", "Diferansiyel küçük ve sabit mi, yoksa küçük ve sıfıra mı yaklaşıyor veya tam olarak sıfır mı?" gibi sorulara bu kaynakları incelediğinde farklı cevaplar buluyordu. Tatmin edecek bir cevaba ulaşamaması nedeniyle kendisi bir cevap üretmeye çalıştı. Çünkü bu soruların ortaya çıkardığı temel sorunsal, "değişimin doğasını" anlamakla aynı anlama gelmekteydi.

Çalışmaları sırasında Marx, diferansiyel kalkülüsün temellerinin yeterince sağlam olmadığı sonucuna vardı. Marx'a göre doğadaki diyalektik süreci tarif etmek için geliştirilen değişken büyüklükleriyle beraber, bu değişkenlerin matematiksel açıklaması da diyalektik olmak zorundaydı (Kennedy, 1977). Okuduğu matematik kitaplarında yer alan türev ve diferansiyel tanımıyla, bu tanımların sahip olması gereken diyalektik karakter uyusmuyordu. Marx'tan beklenilecek şekilde, diferansiyel kalkülüsle kendi başına uğraştı ve kendi orijinal diferansiyel ve türev tanımını geliştirdi.

Marx'ın geliştirdiği türev ve diferansiyel tanımı diyalektik süreçle o kadar uyumlu ve sade bir şekilde kaleme alınmıştı ki Engels 10 Ağustos 1881 tarihinde Marx'a şunları yazıyordu:

*Geçen gün senin matematik yazmalarını -başka bir kitap yardımı olmadan, çalışacak cesareti sonunda buldum; onlara ihtiyacım olmamasına sevindim. Çalışman övgüyü hak ediyor. Problem mükemmel derecede açık ki matematikçilerin inatla gizemli bir hava yaratmalarına ne kadar şaşırırsak azdır.* (Marx, 1983, syf XXVIII)

## MARX'IN DİYALEKTİK YÖNTEMİ

Marx'a ilettiği mektuplarından birinde Engels, Marx'ın yöntemiyle diferansiyel kalkülüsün kuruluşu arasındaki temel farklılığı şöyle ifade eder; "...sen  $x_0$ 'ın  $x_1$ 'e değişimini gerçek bir değişim olarak yaparken diğerleri  $x_0 + \Delta x$  gibi asla niceliğin değişimi olmayan iki niceliğin toplamı olarak başlar."

Marx türev alma sürecinin diyalektik bir süreç olduğu gerçeğini, diyalektik yöntemin önemli kategorilerinden olan olumsuzlamanın olumsuzlaması kategorisi üzerinden açıklamaya çalıştı.

Kabul edelim ki elimizde bir bağımlı ve bir bağımsız değişken içeren genel  $y = f(x)$  fonksiyonu mevcut. Burada bağımsız değişken olan  $x$ , dan  $x_0$ 'e artıyor (veya azalıyor), bu süreçte hangisi olduğundan bahımsız olarak  $x$ ,  $x_0$ 'dan farklı hale geliyor. Bu durum  $x_0$ 'ın ilk olumsuzlamasıdır. Devamına özel bir fonksiyon örneği üzerinden devam edelim.

$y = f(x) = 6x^2$  fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda 'deki değişim

$\Delta y = y_1 - y_0 = 6(x_1)^2 - 6(x_0)^2 = 6(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)$  olur.

Bu durumda değişimin oranını;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{(x_1 - x_0)} = 6(x_1 + x_0)$$

olarak elde ederiz. Şimdi,  $x_1$ 'a geri dönerse yani  $x_0$  değerini alırsa bu durumda  $x_0$ 'ın  $x_1$ 'den farklı olduğunu olumsuzlamak anlamına gelecek ki bu durum ikinci olumsuzlama yani olumsuzlamanın olumsuzlaması anlamına gelecektir.

$x_1 = x_0$  aldığımızda  $y = f(x) = 6x^2$  fonksiyonun türevini yani  $y = 12x$ 'i elde ederiz. Burada ilk olumsuzlamayı olumsuzladığımızda başladığımız noktaya yani  $y = f(x) = 6x^2$  fonksiyonuna değil bu fonksiyonun türevi olan  $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 12x$  fonksiyonuna ulaşmış oluruz. Bu süreçte  $x_1$  değeri tümüyle kaybolmaz, sadece kendisinin limit değerine indirgenmiş olur (Gerdes, 2014).

## 19 YY'DA DİFERANSİYEL KALKÜLÜS NE DURUMDAYDI?

Struik'in belirttiği gibi Fransız Devrimi ve Napolyon dönemi şiddetli ideolojik kırılmaların olduğu Fransa için matematiğin gelişimine uygun bir zemin yaratmıştı (Struik, 1948). Endüstri Devrimi insanlığın önüne çözüm bekleyen yeni bilimsel ve teknik problemler getirmişti. Benzer şekilde genişleyen sanayi ve bunun sonucu olarak büyük kentlerde yoğunlaşan işçi sınıfının varlığı nedeniyle de yemek, su, ısınma, binaların inşası,

sokakların aydınlatılması gibi bugünden bakıldığından oldukça basit gözüken problemlerle karşı karşıyaydı insanlık. Bu problemlerin çözümü doğa bilimlerini ve matematiği bu yöne eğilmeye, buradaki sorunların çözümünü bulmaya yönlendirdi (Gerdes, 2014).

17 ve 18.yy matematikçileri Newton-Leibniz'in temel teoremlerini<sup>[12]</sup> kullanarak integral işlemini almayı biliyorlardı. Buharlı makinelerin icadıyla birlikte manzara radikal olarak değişiyordu. İntegral için yeni uygulama alanları ortaya çıkmaktaydı. Örneğin bir yüzey üzerinde elektrik yüklerinin dağılımı *yüzey integrali* kavramının doğmasına yol açtı. Ve bu integraller daha önce bilinen integral alma teknikleriyle üstesinden gelinmeyecek düzeydeydi. Böylece türev operasyonundan bağımsız olarak integral operasyonunun yeniden tanımlanmasına ve geliştirilmesine ihtiyaç vardı. Fransız matematikçi Augustin Cauchy (1789-1857) integral konseptini türevden bağımsız olarak tanımlayan ilk kişiydi.

Bernhard Riemann(1826-1866) ve Henri Lebesgue (1875-1938) daha sonra bu tanımları genişlettiler (Boyer, 1960). Cauchy yeni tanımları için *sonsuz küçükler* tanımının gerekli olduğunun farkına varmıştı. Kendinden önceki matematikçiler bu kavrama sıfıra çok yakın veya sıfır olabilen bir sabit olarak değerlendirmekteydiler. Bu bağlamda Cauchy ve kendisinden bağımsız olarak Çek matematikçi Bernhard Bolzano (1781-1848) *limit* konseptini geliştirdi. Alman matematikçi Karl Weierstrass ise  $\epsilon$ - $\delta$  (epsilon-delta)<sup>[13]</sup> tanımını vererek limit kavramını matematiksel açıdan sorunsuz hale getirdi (Gerdes, 2014).

17 ve 18.yy matematikçileri hızsız hareketi ve teğetsiz eğrileri doğal görmüyorlardı (Molodski, 1977). Dönemin matematikçilerine göre tüm fonksiyonlar sürekli<sup>[14]</sup> ve türevlenebilirdi çünkü hareketi temsil etmekteydiler. Joseph Fourier'in (1768-1830) ısı denklemlerini çözmek için kullandığı trigonometrik seriler dönemin matematikçilerin bildikleri ve varsaydıkları fonksiyonlar dışında da fonksiyonların varlığını kabul etmelerine yol açtı. Bu fonksiyonlar bazı noktalarda sürekli değildiler ve türevleri yoktu. Lejeune Dirichlet (1805-1859) yeni bir fonksiyon tanımını getirdi ki bu tanım daha önce bilinen fonksiyon kavramının genişlemesine neden oldu. Bu tanımla birlikte fonksiyon konsepti 17. yy ve 18. yy'da ka-

12  $\frac{d}{dx}(\int_a^x f(u) du) = f(x)$  olarak ifade edilen Kalkülüsün temel teoremi özette integral ve türev alma işlemlerinin bir birinin matematiksel tersi olduklarını söyler.

13 Limitin formal tanımı olarak da bilinen bu tanım şu an üniversitelerde de öğretilen tanımdır. Formal tanıma göre  $y=f(x)$  fonksiyonun limit değeri L demek,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  ile gösterilir ve anlamı şudur: Her  $\epsilon$  pozitif sayısı için öyle bir  $\delta$  pozitif sayısı vardır ki;  $x$ , a'nın delta delinmiş komşuluğunda iken  $f(x)$  L'nin epsilon komşuluğundadır.

14 Süreklilik kavramı formal bir açıklamaya sahiptir. Daha informal olarak, sürekli fonksiyonları grafiklerini elimizi çizdiğimiz düzlemde kaldırmadan tamamlayabileceğimiz fonksiyonlar olarak düşünebiliriz.

bul edildiği gibi geometrik ve mekanik bağlamında bağımsızlaşmış oldu ve bilimde daha fazla uygulama alanı bulmaya başladı. Benzer şekilde Rus matematikçi Nikolai Lobachevsky (1793-1856) de Dirichlet'den bağımsız ve benzer bir fonksiyon tanımı ortaya koydu. Fonksiyon tanımında Dirichlet ve Lobachevsky'nin attığı bu ilk adımlar Hermann Hankel (1839-1873), Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918), Augustus de Morgan (1816-1871), Charles Peirce (1839-1914), Giuseppe Peano (1858-1932)'in katkılarıyla genişletildi. 1834 yılında Bolzano her yerde sürekli ancak hiçbir noktada türevi olmayan fonksiyon üretmeyi başardı. En temelde bu durum türev (diferansiyel) konseptinin geometrik bağlamdan kopmasının zorunluluğu anlamına gelmekteydi ki Marx da bu çalışmalardan bağımsız olarak aynı ihtiyacı Engels'e yazdığı 22 Kasım 1882 tarihli mektubunda belirtmişti (Gerdes, 2014).

### MARX'IN DİFERANSİYEL HESAP TARİHİNE BAKIŞI

Marx'ın diferansiyel yaklaşımı oldukça ilgi çekicidir. Öncelikle Marx'ın elinin altındaki kaynak kitaplardan öğrendiği yaklaşımları nasıl ve ne açıdan eleştirdiğine bakalım. "Diferansiyel kalkülüsün tarihi üzerine" başlıklı el yazmasında Marx, o güne kadar olan diferansiyel üzerine olan çalışmaları Newton ve Leibniz'in "mistik" diferansiyel kalkülüsü, D'Alembert'in "rasyonel" diferansiyel kalkülüsü ve Lagrange'ın "cebirsal" diferansiyel kalkülüsü olmak üzere üç farklı tarihsel döneme ayırır. Marx'ın bu periyodizasyonu nasıl yaptığını ve anlamlandırdığını  $y = x^3$  fonksiyonu için açıklamaya çalışalım.

**Mistik diferansiyel kalkülüs:** Newton ve Leibniz'in geliştirdiği diferansiyel tanımıyla başlayalım. Diyelim  $x$ ,  $x_1 = x + dx$ , 'e değişsin. O zaman  $y$  de  $y_1 = y + dy$  'ye değişir ve

$$y_1 = y + dy = (x + dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$$

elde edilir.  $dx^2$  ve  $dx^3$ ,  $3x^2dx$  e göre sonsuz küçük olduğu için ihmal edilebilir ve şu formül elde edilebilir:

$$dy = 3x^2dx$$

Marx bu yaklaşımı mistik bulduğu için eleştirmiştir. Öyle ki, diferansiyel 'in varlığı önsel (a priori) kabul edilmiştir. Bu kabulden sonra gerisi anlamlandırma uğraşısıdır. Başka bir deyişle, yapılan, önceden bilinen cevaba uygun mantıklı açıklamalar kurmaktır. Marx, *Matematiksel Elyazmalarının* ikinci bölümünde şöyle der: "Hala sorulabilen biricik soru şudur: Terimlerin o gizemli örtbas edilişi neden yol üstünde duruyor? Bu, onların yol üstünde durduğunun ve türevle gerçekten ilgisiz olduğunun bilindiğini özellikle varsayar" (Marx, 1983, syf 92). Ancak D'Alembert, Marx'ın da söylediği gibi, daha rasyonel bir yolla bu zorluğu çözmeye çalışmıştır.

**Rasyonel diferansiyel kalkülüs:** D'Alembert de Newton ve Leibniz gibi  $x_1 = x + dx$  ile yola çıkar ancak bir düzeltmeyle:  $x_1 = x + \Delta x$ , yani  $x$  ve " $h$ " ( $\Delta x$ ) dediği belirsiz bir sonlu fark. Bu  $h$ 'nin ya da  $\Delta x$ 'in,  $dx$ 'e değişimi, mistik yöntemde en baştan itibaren gözükürken, bu yöntemde gelişimin nihai sonucu olarak gerçekleşir. Bunu yine  $f(x) = x^3$  örneği üzerinde görelim.

$$f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

$$f(x) = x^3 \text{ olduğundan,}$$

$$f(x + h) - f(x) = 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

Her iki tarafı  $h$ 'ye böldüğümüzde

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$$

olur.  $h = 0$  alırsak eşitliğin sol tarafında  $\frac{dy}{dx}$  kalırken, sağ taraftaki  $3xh + h^2$  terimleri sıfırlanır ve  $\frac{dy}{dx} = 3x^2$  elde edilir. Ancak burada da mistik diferansiyel kalkülüs-te olduğu gibi  $x, x + h$  olur olmaz  $x^3$  de  $(x + h)^3$  olur. Yani  $3x^2$ 'yi çoktan elde etmiş oluruz ve sonrasında  $3x^2$  'yi diğer terimlerden cebirsel olarak ayırmaya çalışırız. Dolayısıyla buradaki türev alma işlemi temelde Newton ve Leibniz'inkiyle aynıdır. Bu yaklaşımın mistik yaklaşımdan farklı olarak geliştirdiği şey Marx'ın diferansiyel katsayısı dediği  $\frac{dy}{dx}$  'in elde edilmiş olmasıdır.

**Cebirsel diferansiyel kalkülüs:** Yine  $f(x) = x^3$  örneği üzerinde görelim.

$$f(x + h) = (x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

Lagrange türevi temel olarak 'nin katsayısı olarak tanımlamıştır. Yukarıdaki örnekten daha genel olarak, bir için Taylor Teoremi'ni kullanarak şunu yazabiliriz:

$$y_1 = f(x + h) = y + \frac{dy}{dx}h + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 h^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 h^3 + \dots$$

Marx, Lagrange'ın yöntemi hakkında şu notu düşer;

*Mistik yöntemde ve rasyonel yöntemde, gereken katsayı binom teoremi tarafından verilmişti ve seri açılımındaki ikinci terimin, h'nin, katsayısında görülebilir. Diğer bütün diferansiyel süreci, mistik ya da rasyonel yöntemde, bir lüks olmaktan öteye gidemiyor. O zaman bu gereksiz ve kullanışsız işlemleri atalım. Binom açılımından biliyoruz ki, ilk gerçek katsayı h'nin; ikinci gerçek katsayı da h^2'nin çarpanı durumunda. Bu diferansiyel katsayıları, değişkeni x olan ilk fonksiyonun türev fonksiyonlarının binom açılımına yerleştirilmesinden başka bir şey değil. Böylece problem, değişkeni x + h olan fonksiyonları, h'nin kuvvetleri artacak şekilde yazabileceğimiz (cebirsel) yöntemler bulmaya indirgenmiş oluyor. Dolayısıyla şu ana kadar Lagrange'ın yönteminde, D'Alembert'in yönteminde doğrudan bulunamayacak hiçbir şey yok.*<sup>(15)</sup> (Marx, 1983, syf 98-99)

15 Burada çeviri Türkçe çevirisinden bağımsız olarak makalenin yazarları tarafından yapıldı.

Marx verdiği örneklerden de görüldüğü üzere, diferansiyelin önceden varlığını kabul edip cebirsel manipülasyonlar yaparak zaten bilinen türevi elde etmeye çalışan yöntemlere karşı çıkar. Başka bir deyişle, türevin, türev sürecinin daha en başında değil, sonunda ortaya çıkması gerektiğini savunur. Ona göre türev, bir türev süreciyle elde edilmeli. Benzer bir eleştiriyi geometri için de yapar ve şöyle der:

...İki şey arasındaki uzaklıktan bahsettiğimizde, bu iki şeyin birbirinden uzak olmasına olanak sağlayan, özsel, kendilerinde olan bir özelliği, baştan kabul etmiş oluruz. A harfiyle masa arasındaki uzaklık nedir? Bu soru saçmadır. Uzaklıktan bahsederken uzaydaki farktan bahsederiz. Dolayısıyla ikisinin de bir uzay içinde, uzayda bir nokta olduğunu kabul ederiz. Böylece uzayda var oldukları konusunda onları eşitlemiş oluruz ve ancak bundan sonra uzayda farklı noktalar olarak ayırt ederiz. (Marx, 1983, syf 221)

### MARX'IN TÜREVE YAKLAŞIMI

Marx'ın türev konusundaki yaklaşım ve katkısını anlamak için önce, pek çok matematik makalesinde de olduğu gibi, kullandığı gösterimleri ve tanımları anlamamız gerekir.  $f$ ,  $x$ 'in bir fonksiyonu olsun.  $y = f(x)$  ifadesinin geliştirilmiş cebirsel gösterimine *ilk fonksiyon*; ilk fonksiyonun türev alma işleminden geçirilmiş haline *öncül fonksiyon*; türev süreciyle elde edilmiş fonksiyona da *türetilmiş fonksiyon* diyeceğiz.

Yine örnekler boyunca kullandığımız  $y = x^3$  üzerinden anlatmaya çalışalım.

$$y = f(x) = x^3$$

olsun. Eğer  $x$ ,  $x_1$ 'e artarsa, o zaman

$$(x_1) - f(x) = y_1 - y = x_1^3 - x^3 = (x_1 - x)(x_1^2 + xx_1 + x^2)$$

olur. O zaman

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = x_1^2 + xx_1 + x^2$$

olur ve öncül (türev),  $x_1^2 + xx_1 + x^2$  olur. Diferansiyel süreci bu noktadan sonra başlar. Yani eğer  $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$ 'in paydasındaki  $x_1$ ,  $x$ 'e doğru azalır (Marx bu operasyona 'diferansiyel operasyonu' diyor), olduğu anda,  $x_1$ , azalma limitine ulaşmış olur. Böylece  $x_1^2$ ,  $x^2$ 'ye değişir;  $x_1x$  de  $x^2$  olur. Aynı zamanda  $x_1 - x = x - x = 0$  olur ve ayrıca  $y_1 - y = 0$  olur. Dolayısıyla şunu elde ederiz:

$$\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = x^2 + xx + x^2 = 3x^2$$

Marx burada önce öncül fonksiyonu elde ediyor, yani  $x_1^2 + xx_1 + x^2$ . Daha sonra  $x = x_1$  değişmesini kullanarak türetilmiş fonksiyonu elde ediyor. Eşitliğin sol tarafında da Marx'ın eleştirdiği üç yöntemdeki sonsuz küçük yaklaşımından farklı olarak türev, yani  $\frac{dy}{dx}$ ,  $x = x_1$  gerçekten 0 olduğunda  $\frac{0}{0}$  oluyor. İlgili el yazmasında şu notu düşüyor Marx:

Burada çarpıcı bir biçimde görülüyor ki:

1) Türevi elde etmek için,  $x_1$ ,  $x$ 'e eşitlenmeli. Ancak o zaman matematiksel anlamda  $x_1 - x = 0$  olur ki bunda hiçbir sonsuz kere yaklaşma (sonsuz küçük) hilesi bulunmaz.

2)  $x_1$ 'i  $x$ 'e eşitleyip  $x_1 - x = 0$ 'ı elde etmemize rağmen, türev sembolik bir gösterim içermez.  $x_1$  değeri, ilk olarak  $x$ 'in değişmesiyle elde edilse bile, kaybolmaz; sadece en küçük değerine,  $x$ 'e geri döner.  $x_1$ ,  $x$ 'in ilk fonksiyonunda yeni bir element olarak kalır ve sonunda türevi üretir. Yani, öncül türev, mutlak minimum değerine indirgenmiştir. (Marx, 1983, syf 7)

### $\frac{dy}{dx}$ sembolü

Marx'ın  $\frac{dy}{dx}$ 'i nasıl anladığını yine bir örnek üzerinden açıklamaya çalışalım. Kabul edelim ki  $y = x^5$  durumunda  $\frac{dy}{dx}$ ,  $5x^4$  olarak hesaplanacaktır. Marx  $\frac{dy}{dx}$ 'i sembolik diferansiyel katsayısı olarak,  $5x^4$ 'ü de gerçek diferansiyel katsayısı olarak değerlendirir. Sembolik katsayısı sadece bir sembolü temsil ederken gerçek diferansiyel katsayısı belirli bir fonksiyonu temsil etmektedir. Bu örnekte  $\frac{dy}{dx} = 5x^4$  yazdığımızda eşitliğin sağ ve sol tarafları farklı nitelikleri ifade etmektedirler. Sol taraf fonksiyona uygulanan operasyonu sağ taraf ise bu operasyonun sonucunda elde edilen özel bir fonksiyonu temsil etmektedir.

### MARX'IN DİYALEKTİĞİ

Felsefi olarak baktığımız zaman da aslında Marx'ın diyalektiğin temel kurallarından olan olumsuzlamanın olumsuzlamasını kullandığını görüyoruz. İlk olumsuzlama olarak  $x_1$ 'i  $x$ 'ten farklı yapan operasyon, daha sonra diferansiyel operasyonu ile  $x_1$ 'i tekrar  $x$  yapan ikinci olumsuzlama. Ancak bu ikili olumsuzlama yoluyla  $f(x)$ 'in gerçek değişimi  $\frac{dy}{dx}$ 'te gözlemlenebilir.

Buradaki diyalektik kavrayışı  $y = f(x) = 6x^2$  fonksiyonu üzerinden açıklamaya çalışalım.

Bu örnekte Marx'ın birazdan bahsedeceğimiz sonlu farkları  $\Delta y$  ve  $\Delta x$

$$\Delta y = y_1 - y_0 = 6(x_1)^2 - 6(x_0)^2 = 6(x_1 - x_0)(x_1 + x_0),$$

$$\Delta x = (x_1 - x_0) \text{ olarak verilir.}$$

Bu durumda;

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6(x_1 - x_0)(x_1 + x_0)}{(x_1 - x_0)} = 6(x_1 + x_0)$  olur. Şimdi  $x_1$ ,  $x_0$ 'a geri dönerse yani değerini alırsa bu durumda  $x_0$ 'ın  $x_1$ 'den farklı olduğunu olumsuzlamak anlamına gelecek ki bu durum ikinci olumsuzlama yani olumsuzlamanın olumsuzlaması anlamına gelecektir.

$x_1 = x_0$  aldığımızda  $y = f(x) = 6x^2$  fonksiyonunun türevini yani  $y = 12x$ 'i elde ederiz. Burada ilk olumsuzlamayı olumsuzladığımızda başladığımız noktaya yani  $y = f(x) = 6x^2$  fonksiyonuna değil bu fonksiyonun türevi olan  $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 12x$  fonksiyonuna ulaşmış oluruz. Bu süreçte  $x_1$  değeri tümüyle kaybolmaz, sadece kendisinin limit değerine indirgenmiş olur. (Gerdes, 2014)

### $\frac{dy}{dx}$ sembolü

Bu noktada Marx'ın neden bugün modern matematikte yazmaktan imtina ettiğimiz  $\frac{0}{0}$  ifadesini kullanmayı tercih ettiğini, daha ayrıntılı olarak açabiliriz. Marx  $\frac{0}{0}$  gösteriminde, onun nereden geldiği ve anlamı gizlendiği için onun yerine sonlu farklar  $x_1 - x$  ( $\Delta x$ ) ve  $y_1 - y$  ( $\Delta y$ )'nin sıfırlanmış olarak görüldüğü  $\frac{dy}{dx}$  'i yazar. Başka bir deyişle  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ,  $\frac{dy}{dx}$  'e değişir.  $\frac{0}{0}$  gerçekten ulaşılabilir bir şeydir. Dönem matematiğinde ve hatta modern matematikte de öğretilen  $\frac{0}{0}$  'a ancak sonsuz yakınsayabildiğimizdir. Marx buna karşı çıkar ve bunun bir kuruntu olduğu söyler. Marx için  $\frac{0}{0}$ , türevin, dolayısıyla değişimin gerçekten gerçekleşmiş olduğunun gösterimidir.  $\frac{dy}{dx}$ ,  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  sembolleri de Marx'a göre ilk fonksiyonun bilgisini tutar. Bu semboller, art arda türetilmiş fonksiyonlar olarak değil de başlangıç noktası olarak alındığı müddetçe gizemli gelecektir (Marx, 1983).

Marx, diğerlerinin aksine değişimin gerçekten olduğunu işaret eder. Bu değişimi anlamak için de  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  'i,  $x$  ve  $x_1$  'in bir fonksiyonu olarak görmek ve daha sona  $x = x_1$  değişimini görmek her açıdan daha iyi olacaktır (Struik, 1948). Böyle bir yaklaşımda  $x_1 - x$ , 0'a sadece yaklaşmakla kalmaz, 0'ın kendisi olur.

Marx döneminin matematik araştırmalarıyla doğrudan ilişkili değildi. Ancak bilse bile  $dx = \Delta x$  eşitliğine, tamamen farklı iki konseptin eşitliğine karşı çıkacağı düşünülüyordu (Struik, 1948).

### MARX MATEMATİKTEKİ KATKILARI ÖZGÜN MÜDÜR?

Matematikte meydana gelen önemli değişimlerin ana coğrafyası Fransa ve Almanya olmuştur. Her ne kadar Endüstri Devrimi'nin başkenti olsa da İngiltere'nin sahip olduğu Newtoncu şovenizm nedeniyle gelişmelerden aynı düzeyde etkilendiğini söylemek pek mümkün değildir (Struik, 1948). Marx'ın türev ve integral kalkülüsünde yaşanan gelişmelerden haberdar olmayışı bununla açıklanabilir. Bununla birlikte Marx'ın başvurduğu matematik kaynakları tümüyle 17 ve 18. yüzyıl matematiğinin etkisi altındaydı (Struik, 1948). Ayrıca

Kapital'in ilk cildinin İngilizceye çevirisini ve Marx'ın matematik mentorluğunu da yapan Samuel Moore'da Marx'ın sorularına yeterli cevap verecek bilgi düzeyinde değildi (Kennedy, 1977). Bu faktörler hesaba katıldığında Marx'ın matematiğin 19.yüzyıldaki gelişiminden haberdar olduğunu söylemek pek mümkün değildir. Bu nedenle aşağıda sıralanan başlıklar Marx'ın katkısını dönemin matematikçilerinin yaptıklarından bağımsız, orijinal olarak değerlendirmeyi hak etmektedir;

- Kalkülüsün geometrik bağlamdan bağımsızlaşması ihtiyacının keşfetmesi
- Diyalektik yöntemle diferansiyel kalkülüsün yeniden yorumlanması<sup>(16)</sup>
- Sonsuz küçükleri değişken olarak belirtmesi
- $\frac{dy}{dx}$  'i operatör olarak görmesi

Her ne kadar Marx'ın matematiği, matematiğin gelişimine katkı yapmaktan ziyade işçi sınıfının burjuvaziye karşı biricik felsefi silahı, diyalektik yöntemi, geliştirmek için çalıştıysa da Matematiksel Elyazmaları'nda ürettiği matematik, literatüre bağımsız bir katkı olarak dâhil edilebilir (Struik, 1978).

### SON SÖZ: ELYAZMALARINDA YÖNTEM

Marx'ın matematik çalışmasındaki temel motivasyonu, daha önce de belirtildiği gibi politik ekonomi ve diyalektik yöntemi, matematikte yer alan "değişim" kavramı üzerinden daha da derinleştirmekti. Marx ve Engels diyalektiğin sadece toplum bilimlerinde değil, doğa bilimleri ve matematikle nasıl uyumlu olduğunu göstermek konusunda kendilerini sorumlu hissettiler. Marx'ın elyazmalarında dile getirdiği gibi; "...burada da, her yerde olduğu gibi, belirsizlik peçesini kaldırıp atmak önemlidir" (Marx, 1983, s.107). Marx, değişken niceliklerin matematiğini diyalektik yöntemle incelemenin ancak diferansiyeller, sonsuz küçükleri daha derinlemesine irdelerek başarılabilceğini düşünüyordu.

Marx hem dönemin matematik bilgisinin gelişim düzeyi, hem de incelediği kalkülüs kitaplarındaki "bulanıklık" nedeniyle diferansiyel ve integral kavramlarını anlayabilmek için kendi yöntemini geliştirmek zorunda kaldı. Marx'ın elyazmalarında geliştirdiği yöntemi açıklayan en önemli nokta sembollerin işlemlerde sahip olduğu "operasyonel" roldür. Marx bir problemin çözümünde kullanılan sembol seçiminin problemin çözümü için strateji belirlemekle aynı şey olduğunu söyler. Sürecin kendisi için ortaya çıkan sembole Marx "gerçek" der. Marx'ın bu yaklaşımı, 1800'lerin sonlarına kadar ortaya atılan yaklaşımlardan farklılık göstermektedir. Dönemin matematiğinin bu sembolleri kullanması gerekiyordu. Her ne kadar günümüz matematiği bu

16 İngiliz George Landen 1764 yılında Marx'ın metoduna benzer bir metod geliştirdi ancak Marx, Landen'in kitabına ulaşamadı.

sembolleri kullanmasa da bu semboller korunmaktadır. Hiçbir anlama sahip olmayan bu kavramların korunmasını sağlayan nedir sorusuna Marx'ın yanıtı "gerçek" tanımı olmuştur.

Elyazmalarının ilk kısmı olan "Türetilmiş Fonksiyon Kavramı Üzerine" başlıklı kısımda kendi "gerçek" dediği (cebirsal yöntem) diferansiyel metodunu  $y = ax$  fonksiyonu üzerinden  $dy/dx$  türeterek oluşturmaya başlar. Daha sonra daha karmaşık fonksiyonlar için aynı şeyi yapmaya çalışır. Marx'ın limit yaklaşımı yerine  $y = ax$ 'daki süreklilik tanımına bağlı kalır. Marx  $dy/dx$ 'ın bir sembol olduğunu aynı zamanda da  $x$ 'e bağlı olarak tanımlanan fonksiyonların hangi operasyonların uygulandığını da gösterdiğini belirtir.

Benzer şekilde elyazmalarının ikinci kısmında da çarpım<sup>17</sup> ve bölüm fonksiyonlarının diferansiyel hesabı yardımıyla "tersine çevrilmiş" yöntemi elde eder. Çarpım fonksiyonunun diferansiyeli sonunda elde edilen Marx şöyle dile getirir;

...böylece, inisiyatif sağ kutuptan cebirselden, sol kutba sembolîğe kaydırılır. Ama, buna uyarak, diferansiyel hesap da şimdiden kendi tabanından (Boden) bağımsız olarak işleyen özel bir hesaplama biçimi gibi görünür. Çünkü onun başlangıç noktaları, yalnız onun olan ve ona özgü matematiksel niceliklerdir. (Marx, 1983, syf 20-21)

Matematikte gerçekleşen her bir niteliksel gelişme beraberinde yeni niteliksel sembollerin de doğmasında yol açar. Marx'ın yöntemi içerisinde var olan fonksiyonların alanından diferansiyel operatörlerinin alanına geçiş aslında nicelikten niteliğe geçiştir. Hegel'in tanımladığı biçimiyle matematik niceliklerin bilimidir. Ancak niteliksel süreç niceliksel sürecin dışında durmaz birbirine dönüşür. Marx'ın elyazmalarında göstermeye çalıştığı temel süreç de bu dönüşümün kendisidir.

## KAYNAKÇA

- Baksi, P. (1994). A Note: On the history of collecting, deciphering, editing and publication of Marx's mathematical manuscripts. mathematical manuscripts: together with a special supplement, *Calcutta*. Viswakos Parisad, p. 399-401.
- Boyer, C. (1960), *A History of mathematics*, John Wiley & Sons, New York.
- Marx, Engels Collected Works, 1963, Vol.29, Berlin.
- Marx, Engels Collected Works, 1964, Vol.30, Berlin.
- Dauben, J.W., Scriba, C.J. (2002). *Writing the history of mathematics:its historical development*. Berlin: Birkhäuser.
- Engels, F. (1995). *Anti Dühring*, Üçüncü Baskı, (çev., Kenan Somer), Ankara: Sol Yayınları.
- Gerdes, P. (2014). *The philosophic-mathematical manuscripts of Karl Marx on differential calculus:An introduction*, English Edition, MEP Publications, Minneapolis, USA.

- Kolman, E. (1931). Short communication on the unpublished writings of Karl Marx dealing with mathematics, the natural sciences and technology and the history of these subjects, *Science at the crossroads*, Kniga, London, pp. 233-235.
- Kolman, E. (1932). Verhandlungen des internationalen mathematiker-kongresses, Sektions-Vertraege (2), Zürich, s. 349-351.
- Kennedy, H. C. (1977). Karl Marx and the foundations of differential calculus. *Historia Mathematica* (4), 303-318.
- Labérenne, P. (1971). Mathematics and Marxism, *Great currents of mathematical thought* (Ed. F. Le Lionnais), Dover Publications, New York, Vol. 2, 58-68.
- Marx, K. (1990) *Matematiksel elyazmaları*, (Ö. Ünalın, çev) İstanbul: Başak Yayınları.
- Marx, K. (1983). *Mathematical manuscripts*, NEWYORK, New Park Publications.
- McLellan, D. (2006). *Karl Marx: A Biography* (3rd edition), Palgrave Macmillan.
- Mehring, Franz (1962), *Karl Marx: The Story of His Life*, University of Michigan Press, Ann Arbor.
- Molodtschi, V. (1982), The mathematical manuscripts of K.Marx and the evolution of the history of mathematics in theUSSR (in Russian), *Istori-ko-Matematicheskie Issledovaniya*, Leningrad, Vol. 26, 9-17.
- Struik, D. J. (1948). Marx and Mathematics. *Science & Society*, 12(1), 181-196.
- Theckedath, K. K. (1973). Marxism and Mathematics. *Social Scientist*, 1(6), 30-41.

17  $y=f(x)=uz$  çarpım fonksiyonun  $x$ 'e göre türevini alırken uyguladığı süreç olarak  $dy/dx = z du/dx + u dz/dx$ .